



**educación  
de calidad**  
EL CAMINO PARA LA PROSPERIDAD

**Grado 6<sup>o</sup>  
Matemáticas**



**Secundaria  
Activa**

**Ministerio de  
Educación Nacional**  
República de Colombia



Libertad y Orden

**Prosperidad para todos**



Ministerio de  
Educación Nacional  
República de Colombia



Libertad y Orden

## Prosperidad para todos

### Secundaria Activa

Matemáticas grado sexto

María Fernanda Campo Saavedra  
**Ministra de Educación Nacional**

Mauricio Perfetti del Corral  
**Viceministro de Educación Preescolar, Básica y Media**

Mónica López Castro  
**Directora de Calidad para la Educación Preescolar, Básica y Media**

Heublyn Castro Valderrama  
**Subdirectora de Referentes y Evaluación para la Calidad Educativa**  
**Coordinadora del proyecto**

Clara Helena Agudelo Quintero  
Gina Graciela Calderón Rodríguez  
María del Sol Effio Jaimes  
Omar Alejandro Hernández Salgado  
Édgar Mauricio Martínez Camargo  
Diego Fernando Pulecio Herrera  
Eliceo Ramírez Rincón  
**Equipo técnico**

©2012 Ministerio de Educación Nacional.

Todos los derechos reservados.

Prohibido la reproducción total o parcial, el registro o la transmisión por cualquier medio de recuperación de información, sin permiso previo del Ministerio de Educación Nacional.

©Ministerio de Educación Nacional

ISBN serie Secundaria Activa: 978-958-691-485-7

ISBN libro: 978-958-691-498-7

Dirección de Calidad para la Educación Preescolar, Básica y Media.  
Subdirección de Referentes y Evaluación para la  
Calidad Educativa.  
Ministerio de Educación Nacional, Bogotá,  
Colombia, 2012.

www.mineduccion.gov.co

Equipo de la actualización y cualificación del Modelo Educativo Secundaria  
Activa elaborado por:

AGUIRRE ASESORES S.A.S.  
AGUIRRE ASESORES S.A.S.

Eduardo Aguirre Dávila  
**Director de proyecto**

Amparo Calambás Clavijo  
**Autora**

Luz Marina Rincón Rojas  
**Coordinadora editorial**

Ligia Flórez Bejarano  
**Coordinadora administrativa**

Stefanie Vélez  
**Correctora de estilo**



Julián Ricardo Hernández Reyes - PAUTA EDITORIAL Y DIRECCIÓN DE DISEÑO

Walter Bolívar - PAUTA EDITORIAL

Arnold Hernández - PAUTA EDITORIAL

Germán Piza - DIAGRAMACIÓN

Amy Rodríguez - DIAGRAMACIÓN

Freya Gil - DIAGRAMACIÓN

Jhon Cortés - ILUSTRACIÓN

Catalina Cardona - ILUSTRACIÓN

Ma. Angélica Martínez - ILUSTRACIÓN

**Diagramación, diseño e ilustración**

Secundaria Activa es el resultado de la actualización y cualificación del modelo educativo Telesecundaria, en su versión colombiana (1999-2002), que a su vez fue adaptado de los módulos de Telesecundaria Mexicana por parte del Ministerio de Educación Nacional.

Esta actualización se hizo dentro del marco del contrato No. 428 de 2010, suscrito entre el Ministerio de Educación Nacional y Aguirre Asesores S.A.S., cuyos derechos fueron cedidos al Ministerio de Educación Nacional.

El Ministerio de Educación Nacional agradece a la Secretaría de Educación Pública de México (SEP) y al Instituto Latinoamericano para la Comunicación Educativa (ILCE) el apoyo técnico y la generosidad en la transmisión de los avances educativos y tecnológicos al Ministerio de Educación de Colombia, durante los años comprendidos entre 1999 y 2002.

### Artículo 32 de la ley 23 de 1982

El siguiente material se reproduce con fines estrictamente académicos y es para uso exclusivo de los estudiantes del modelo Secundaria Activa, de acuerdo con el Artículo 32 de la ley 23 de 1982, cuyo texto es el siguiente: "Es permitido utilizar obras literarias o artísticas o parte de ellas, a título de ilustración, en otras destinadas a la enseñanza, por medio de publicaciones, emisiones o radiodifusiones, o grabaciones sonoras o visuales, dentro de los límites justificados por el fin propuesto, o comunicar con propósito de enseñanza la obra radiodifundida para fines escolares, educativos, universitarios y de formación personal sin fines de lucro, con la obligación de mencionar el nombre del autor y el título de las obras utilizadas".

<b>Tabla de contenido</b>	<b>3</b>
<b>Presentación</b>	<b>5</b>
<b>Estructura Secundaria Activa</b>	<b>7</b>
<b>Unidad 1. Construyo Sistemas de números</b>	<b>14</b>
<b>Capítulo 1. Conozco el Sistema de los números naturales (N)</b>	<b>16</b>
Tema 1. Identifico regularidades numéricas en situaciones de conteo y agrupación	17
Tema 2. Formas de conteo a través de la historia	23
Tema 3. Ordeno y represento el conjunto de los números naturales (N)	34
Tema 4. Reconozco los significados de las operaciones con los números naturales en situaciones concretas	39
Tema 5. Comprendo las propiedades matemáticas de las operaciones: suma, resta, multiplicación y división entre números naturales	45
Tema 6. Propiedades matemáticas de las operaciones: potenciación y radicación entre números naturales	55
<b>Capítulo 2. Número racional positivo (Q<sup>+</sup>)</b>	<b>60</b>
Tema 1. Reparto proporcional	61
Tema 2. Comprendo el significado de la fracción como razón	65
Tema 3. Comprendo el significado de la fracción como porcentaje	68
Tema 4. Fracciones decimales	71

	Tema 5. Realizo transformaciones con operadores de la forma $xA$	82
	Tema 6. Realizo transformaciones con operadores de la forma $x\frac{1}{b}$	85
	Tema 7. Realizo transformaciones con operadores de la forma $\frac{a}{b}x$	87
<b>Unidad 2.</b>	<b>Mido y Construyo</b>	<b>96</b>
	<b>Capítulo 1. Trabajo en el espacio con localizaciones, transformaciones formas y figuras</b>	<b>98</b>
	Tema 1. Conceptos básicos de geometría y manejo de instrumentos geométricos	99
	Tema 2. Ubico objetos en el espacio y modelo sólidos	110
	Tema 3. Construcciones simétricas y a escala	115
	Tema 4. Construyo ángulos y clasifico polígonos	125
	<b>Capítulo 2. Realizo mediciones y cálculos</b>	<b>132</b>
	Tema 1. Construyo los conceptos de magnitud y cantidad	133
	Tema 2. Realizo mediciones y cálculos de longitud	137
	Tema 3. Realizo mediciones y cálculos de áreas	144
	Tema 4. Realizo mediciones y cálculos de masa	154
	Tema 5. Realizo mediciones y cálculos de tiempo	156
<b>Unidad 3.</b>	<b>Proporcionalidad</b>	<b>166</b>
	<b>Capítulo 1. Proporciones directas</b>	<b>168</b>
	Tema 1. Cambio y variación directa	169
	Tema 2. Comprendo la proporcionalidad directa	183
<b>Unidad 4.</b>	<b>Sistemas de datos</b>	<b>200</b>
	<b>Capítulo 1. Términos básicos, tabulación, representaciones gráficas y medidas de centralización</b>	<b>202</b>
	Tema 1. Términos básicos de la estadística	203
	Tema 2. Interpretación de las medidas de centralización	217
	Tema 3. Probabilidad	221
	<b>Bibliografía</b>	<b>243</b>
	<b>Referencias fotográficas</b>	<b>247</b>

La educación es un derecho establecido en la Constitución Política de Colombia. En cumplimiento de ese mandato, el Ministerio de Educación ha diseñado y cualificado diferentes modelos educativos flexibles como alternativas a la oferta educativa tradicional, para responder a las características y necesidades particulares de los grupos poblacionales.

Es así como el Ministerio de Educación Nacional presenta el modelo educativo Secundaria Activa dirigido a los estudiantes de básica secundaria de las zonas rurales y urbanas marginales. Una alternativa de alta calidad, encaminada a disminuir las brechas en cuanto a permanencia y calidad en este nivel educativo.

La propuesta pedagógica de Secundaria Activa privilegia el aprendizaje mediante el saber hacer y el aprender a aprender. En procura de este objetivo, los textos están orientados al desarrollo de procesos relacionados con los saberes conceptuales, procedimentales y actitudinales que, de manera significativa y constructiva, van configurando las habilidades de los estudiantes para alcanzar el nivel de competencia esperado en cada grado.

Por esa razón, estos módulos de aprendizaje están diseñados sobre una ruta didáctica y editorial pensada para que los estudiantes, a partir del análisis e interpretación de diversas situaciones problema, puedan aproximarse a su realidad y a su cotidianidad, y le encuentren significado a los contenidos planteados.

Secundaria Activa cuenta entre sus componentes con módulos para los grados 6, 7, 8 y 9 de la básica secundaria, en las áreas de Matemáticas, Lenguaje, Ciencias Naturales y Educación Ambiental, Ciencias Sociales, Educación Ética y Valores Humanos, Educación Artística, Educación Física, Recreación y Deporte y orientaciones para la formulación e implementación de proyectos pedagógicos productivos.

Dispone también de un manual de implementación que ofrece indicaciones generales y pedagógicas sobre el modelo y, de guías para los docentes por cada área y grado, en las que encuentran orientaciones disciplinares y didácticas que apoyan su trabajo en el aula.

Esta propuesta es una oportunidad educativa para que muchos jóvenes puedan continuar sus estudios de básica secundaria y ampliar sus posibilidades de vida digna, productiva y responsable, como ciudadanos colombianos.

El modelo surgió del proceso de cualificación y adaptación de los módulos de Telesecundaria de México (1999-2002) para lograr la versión colombiana. El Ministerio de Educación Nacional de Colombia reitera su agradecimiento a la Secretaría Pública de México (SEP) y al Instituto Latinoamericano para la Comunidad Educativa (ILCE) por el apoyo técnico y la generosidad en la transmisión de los avances educativos y tecnológicos durante esos años.



## ¿Cómo está compuesto el modelo Secundaria Activa?

El modelo Secundaria Activa contiene materiales educativos para siete áreas del conocimiento. Estas áreas son: Matemáticas, Ciencias Sociales, Lenguaje, Ciencias Naturales, Ética, Educación Física y Educación Artística. Además, presenta Orientaciones para el desarrollo de Proyectos Pedagógicos Productivos en los establecimientos educativos en los que se implementa el modelo. Estas orientaciones están dirigidas a docentes y a estudiantes por conjuntos de grados.

Estos materiales están conformados por módulos para los estudiantes y guías didácticas para los docentes de cada grado.



## ¿Cómo son los módulos de los estudiantes?

Los módulos de aprendizaje son los documentos básicos de trabajo para el estudiante. En ellos se consignan los estándares básicos de competencias propias de cada área, así como los diferentes momentos para desarrollar y aplicar los conceptos y temas propuestos. Cada módulo está compuesto por:



### 1 Unidad

Es la sección mayor que reúne los capítulos y los temas. Son cuatro unidades para cada módulo para las áreas básicas (Lenguaje, Matemáticas, Ciencias Sociales, Ciencias Naturales, Ética y Valores y Educación Física).

### 2 Título

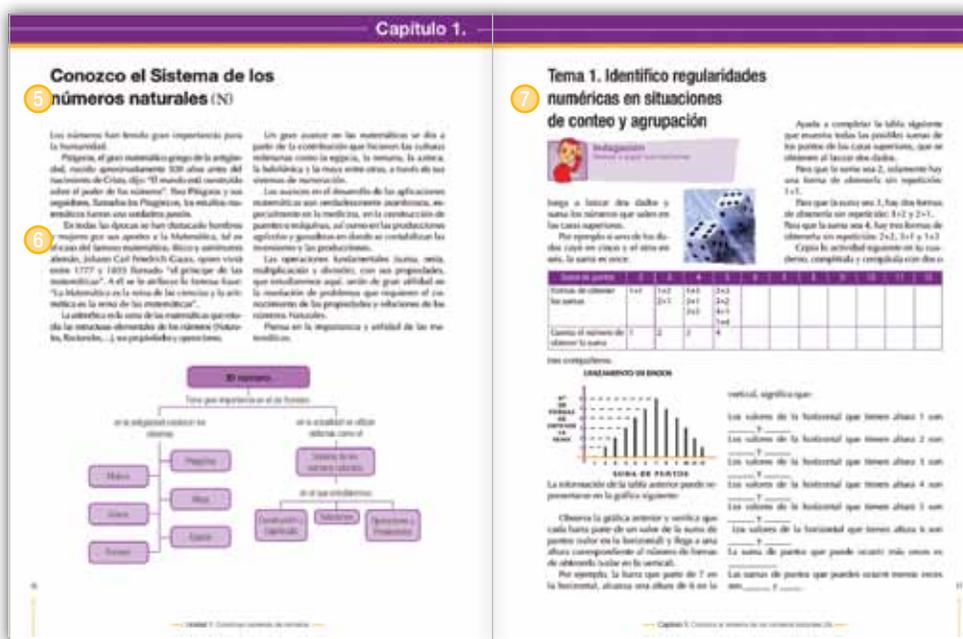
Es la presentación de la unidad de manera motivadora. Este título alude a la situación general que se trabajará en la unidad y guarda relación con las competencias propuestas por el MEN.

### 3 Resolvamos

Presenta una situación problemática de la vida cotidiana, la cual requiere el ejercicio de diferentes acciones de pensamiento como argumentar, discutir, explicar, debatir, indagar o proponer. Esta situación contextualiza al estudiante con los desarrollos básicos de la unidad y procura desequilibrios conceptuales que motiven al estudiante a encontrar soluciones. La situación planteada se acompaña de preguntas hipotéticas.

### 4 Referentes de calidad y capítulos

De manera enunciativa, exponen los estándares básicos de competencia y actividades que se desarrollarán en los capítulos.



5 Capítulo

Corresponde a cada una de las divisiones de la unidad y se refieren a los lineamientos o ejes articulares de cada área.

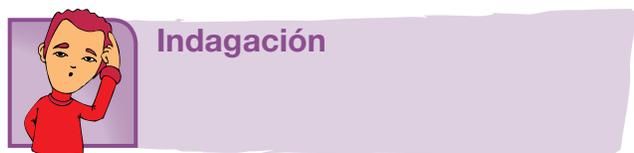
6 Organizador gráfico

Muestra de manera sucinta y gráfica los principales elementos que se tratan en el capítulo y se convierte en un indicativo del derrotero y la interrelación de los elementos tratados.

7 Tema

Son las partes en que se dividen los capítulos. Cada tema se compone de los siguientes momentos:

- Indagación
- Conceptualización
- Aplicación



El propósito de este primer momento es acercar a los estudiantes a la temática mediante actividades previas como la presentación de situaciones, textos, material gráfico y actividades, que por su atractivo motivan a los jóvenes y con ello establece un primer acercamiento a los contenidos que se abordan. Igualmente, pretende indagar por los saberes previos que traen los estudiantes, a través de situaciones variadas.



## Conceptualización

En este segundo momento confluyen diversas experiencias de aprendizaje que buscan la comprensión de los contenidos a través de lecturas y diversas actividades cognitivas. Los contenidos se elaboran de acuerdo con el desarrollo cognitivo de los estudiantes de cada grado, lo que implica una adecuada selección de los mismos y su profundidad, presentación y lenguaje adecuado. A la par de los contenidos, existen herramientas cognitivas que acompañan los contenidos conceptuales para favorecer su comprensión; por esto se presentan con subtítulos como ubicar, identificar, analizar, comparar, explicar, clasificar, inferir, transferir, aplicar, predecir, comunicar, entre otros.



## Aplicación

Este tercer momento tiene por objeto trabajar las habilidades propias que desarrolla el área. Por ello, las actividades que se realizan enfrentan al estudiante a una situación real o de contexto para que logren un aprendizaje significativo.

## Secciones flotantes

Dentro de los temas también se encuentran unas secciones flotantes que tienen el propósito de dinamizar los contenidos, presentando información que amplía o se relaciona con el concepto trabajado. Todas las áreas comparten la sección *Entendemos por*, en la que se presentan las definiciones de los conceptos clave. Las otras secciones están definidas en particular para cada una de las áreas (ver información íconos).

### Aplico mis conocimientos

Esta sección se presenta a lo largo del momento de la conceptualización. Es un espacio que consta de actividades de aprendizaje que acompañan los contenidos conceptuales para favorecer su comprensión.

### Entendemos por...

En este ladillo se incluyen las definiciones de los conceptos clave. El propósito de esta sección es enriquecer el léxico del estudiante.

### Día a día

Aquí se trata de un texto en el que se relaciona la temática que se va desarrollando con aspectos de la vida diaria, con los que se relaciona el estudiante en su diario vivir, de tal manera que se evidencia como el conocimiento de la escuela tiene relación con la cotidianidad y por lo tanto es significativo.

### Diversión matemática

Es airear el tema con algún acertijo o juego relacionado con el tema.

## Cierre de capítulo

Al finalizar, cada capítulo ofrece:



### 8 Este capítulo fue clave porque

Presenta al estudiante una síntesis de los temas desarrollados durante el capítulo, para lo cual destaca su importancia y aplicabilidad.

### 9 Conectémonos con

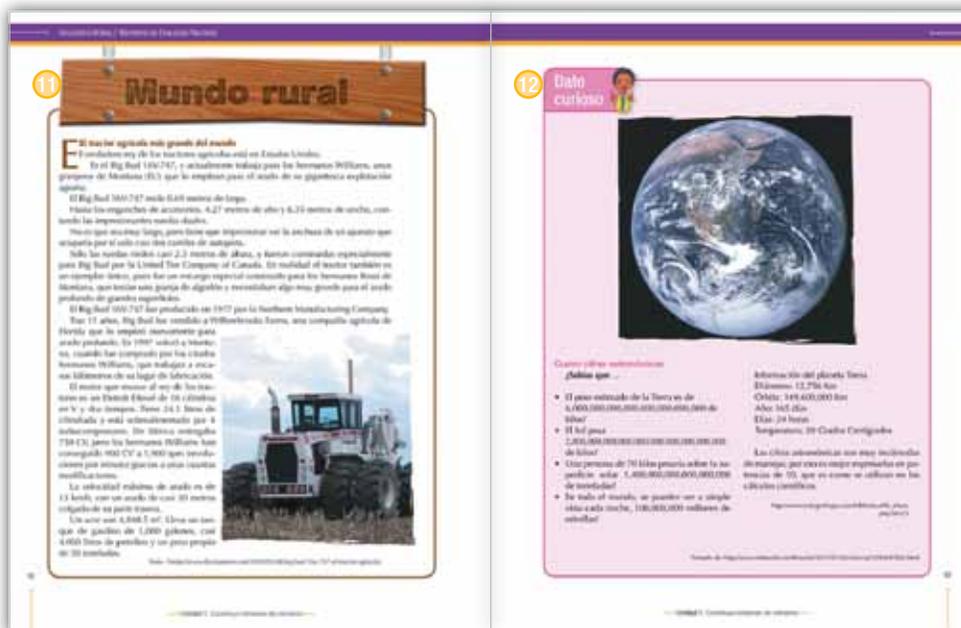
Propone información que evidencia la relación de los contenidos básicos tratados con los de otras áreas de estudio y con las habilidades que estos puedan desarrollar.

Cada una de las unidades presenta al final:



10 Repasemos lo visto

Es la síntesis de la unidad y la conclusión de la situación problema.

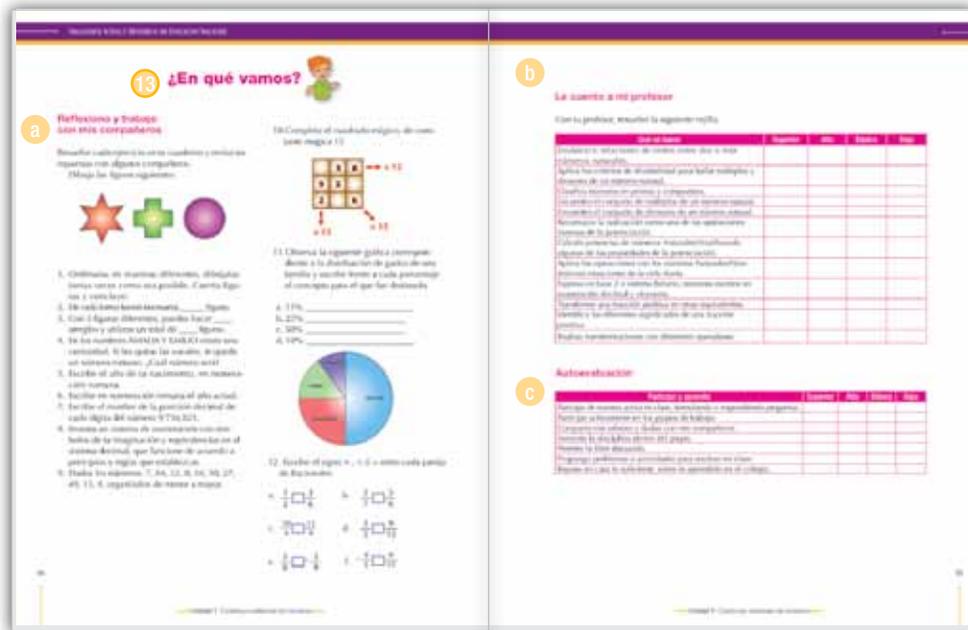


11 Mundo rural

Esta sección aprovecha el tema trabajado en la unidad, para relacionarlo con la vida del campo, de tal forma que los conceptos que se desarrollan contribuyan a la comprensión de fenómenos sociales y naturales rurales: ambiente, procesos productivos, organización comunitaria, paisaje, entre otros.

12 Dato curioso

Presenta información relacionada con aspectos como interpretación del tema por sujetos del pasado o aplicaciones tecnológicas en diferentes épocas, con la intención de motivar al estudiante, presentando la manera como los conceptos, las habilidades y los valores desarrollados por el género humano, en algunas oportunidades puede sorprender.



### 13 ¿En qué vamos?

Corresponde a los procesos de valoración del aprendizaje y evalúa si los aprendizajes de los estudiantes son significativos. También se busca que el estudiante sea responsable y controle su proceso de aprendizaje, es decir, su habilidad de autorregulación.

Esta sección está conformada por tres ejes:

**a Coevaluación.** Se presenta en la sección de *Reflexiono y trabajo con mis compañeros*, en la cual se mide la aprehensión de los conceptos, competencias y procedimientos esenciales a manera de aprendizaje colaborativo. El objetivo de esta sección es que el estudiante se vea frente a sus pares y los reconozca como interlocutores válidos. A este respecto, el estudiante podrá comparar sus respuestas con las de sus compañeros.

**b Heteroevaluación.** En el apartado titulado *Le cuento a mi profesor*, se establece un diálogo entre el docente y el estudiante para medir los alcances y logros especialmente de carácter procedimental (saber hacer) de las competencias, por medio de matrices que estipulan los criterios de calidad básicos de la unidad. Las matrices se ajustan desde los enunciados o metas de desarrollo y los criterios propios del Decreto 1290 de 2009.

**c Autoevaluación.** Corresponde a la sección *Participo y aprendo*, franja que cierra el proceso de valoración con una matriz en donde el estudiante se evalúa. Igualmente, esta sección permitirá establecer los procesos de mejoramiento para las unidades subsiguientes.

# Construyo Sistemas de números

## Resolvamos

### Te has preguntado:

#### ¿Para qué sirven los números?

Los números están involucrados en la vida del ser humano desde el instante en que nace hasta cuando muere y hasta después se siguen contando los años que tendría si viviera y los aniversarios de su fallecimiento, inclusive.

A lo largo de toda la vida, del ser humano está haciendo uso de los números.



Toñito es un niño que nació

El día 5

Del mes 6 (junio)

Del año 2010

Pesó 3,200 gramos

Midió 53 centímetros

Su primera camisita fue talla 0

En tu cuaderno, escribe

algunos datos numéricos personales como:

- Fecha de nacimiento.
- Número de tu documento de identidad.
- Estatura en centímetros.
- Edad en años cumplidos.
- Número de teléfono.
- Número de hermanos.

Piensa si hay alguna actividad propia del ser humano en la cual no se necesitan los números.

Si encuentras alguna descríbela.

Esta unidad te introducirá en una parte de la historia de las matemáticas que corresponde a los números. A través del estudio de los sistemas numéricos; tendrás un panorama de su evolución y apreciarás las ventajas del sistema de numeración decimal empleado actualmente en el mundo.

Podrás verificar que las personas utilizan los números para:

**Identificar.** Por ejemplo, un número telefónico, una dirección,...

**Cuantificar.** Por ejemplo, caminé 5 cuadras desde mi casa hasta la iglesia, tengo \$10,000.

Estos números se denominan cardinales por indicar la cantidad de elementos de un conjunto.



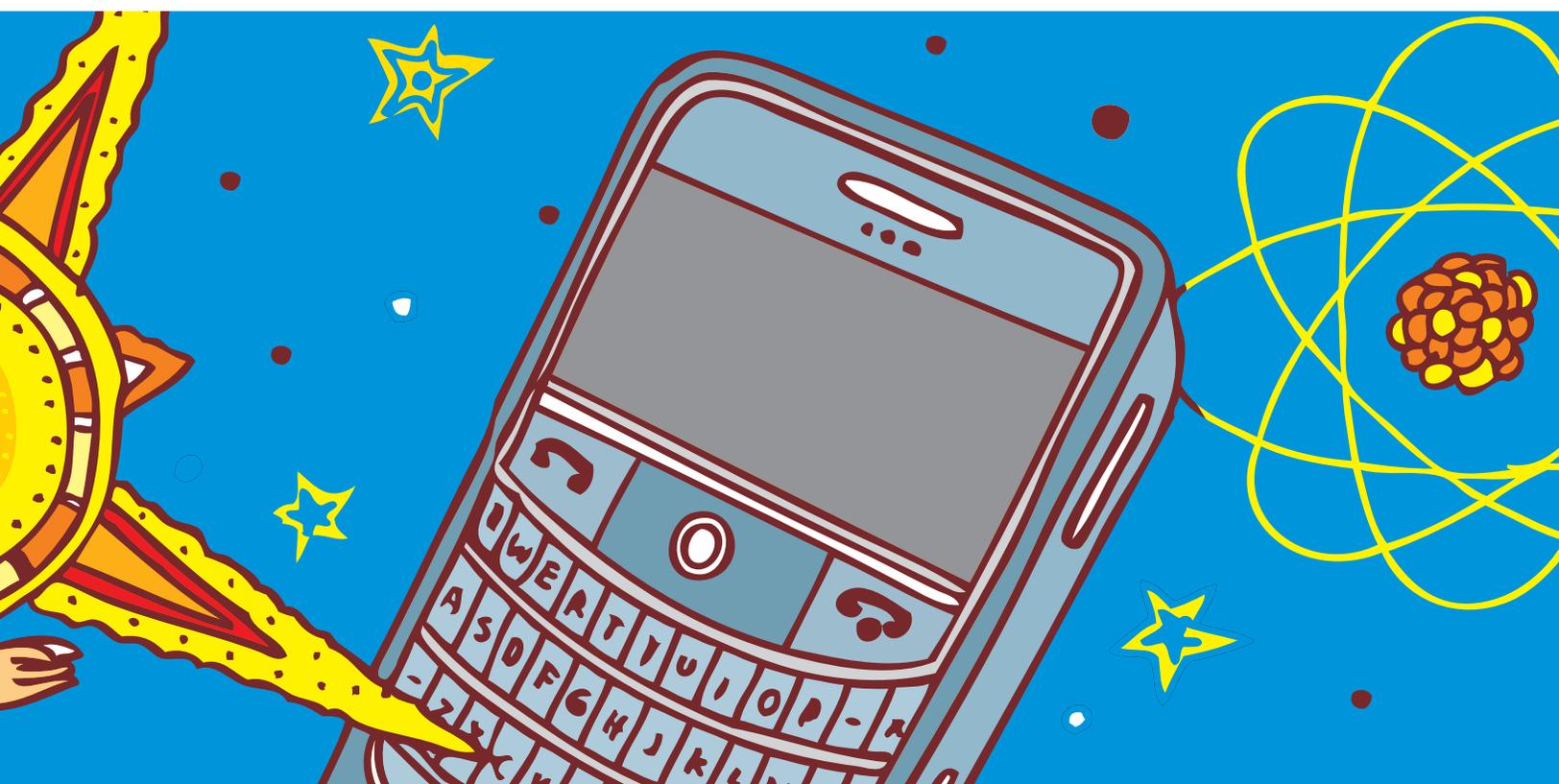
**Ordenar.** Por ejemplo, primero me lavo las manos, segundo tomo el almuerzo y tercero descanso.

Aquí se utilizan los números ordinales, que son aquellos que nos indican una secuencia u orden en la ocurrencia de formado por astros, planetas, estrellas, etc. la representación de la estructura de un átomo, el dibujo del “hombre de Vitruvio”, realizado en sucesos. Ellos son: primero, segundo, tercero, etcétera.

También conocerás la construcción del sistema de los números Naturales ( $\mathbb{N}$ ) y los significados de los números Racionales positivos ( $\mathbb{Q}^+$ ).

La ilustración siguiente muestra diferentes situaciones en las cuales se utilizan los números. En el universo están: el hombre de Vitruvio, que tiene las proporciones del cuerpo humano, dibujado en 1487 por Leonardo Da Vinci y el celular BlackBerry que ha logrado posicionarse en un lugar muy importante para las personas, hoy en día (año 2011).

Referentes de calidad	Capítulos
<b>Estándares</b>	1. Conozco el Sistema de los números naturales ( $\mathbb{N}$ )
Formulo y resuelvo problemas en contextos de medidas relativas y de variaciones en las medidas.	2. Conozco los números racionales positivos ( $\mathbb{Q}^+$ )
Utilizo números racionales en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida.	
Justifico la extensión de la representación polinomial decimal usual de los números naturales a la representación decimal usual de los números racionales, utilizando las propiedades del sistema de numeración decimal.	
Justifico procedimientos aritméticos utilizando las relaciones y propiedades de las operaciones.	
Formulo y resuelvo problemas en situaciones aditivas y multiplicativas, en diferentes contextos y dominios numéricos.	
Formulo y resuelvo problemas cuya solución requiere de la potenciación o radicación.	



## Conozco el Sistema de los números naturales ( $\mathbb{N}$ )

Los números han tenido gran importancia para la humanidad.

Pitágoras, el gran matemático griego de la antigüedad, nacido aproximadamente 500 años antes del nacimiento de Cristo, dijo: “El mundo está construido sobre el poder de los números”. Para Pitágoras y sus seguidores, llamados los Pitagóricos, los estudios matemáticos fueron una verdadera pasión.

En todas las épocas se han destacado hombres y mujeres por sus aportes a la Matemática, tal es el caso del famoso matemático, físico y astrónomo alemán, Johann Carl Friedrich Gauss, quien vivió entre 1777 y 1855 llamado “el príncipe de las matemáticas”. A él se le atribuye la famosa frase: “La Matemática es la reina de las ciencias y la aritmética es la reina de las matemáticas”.

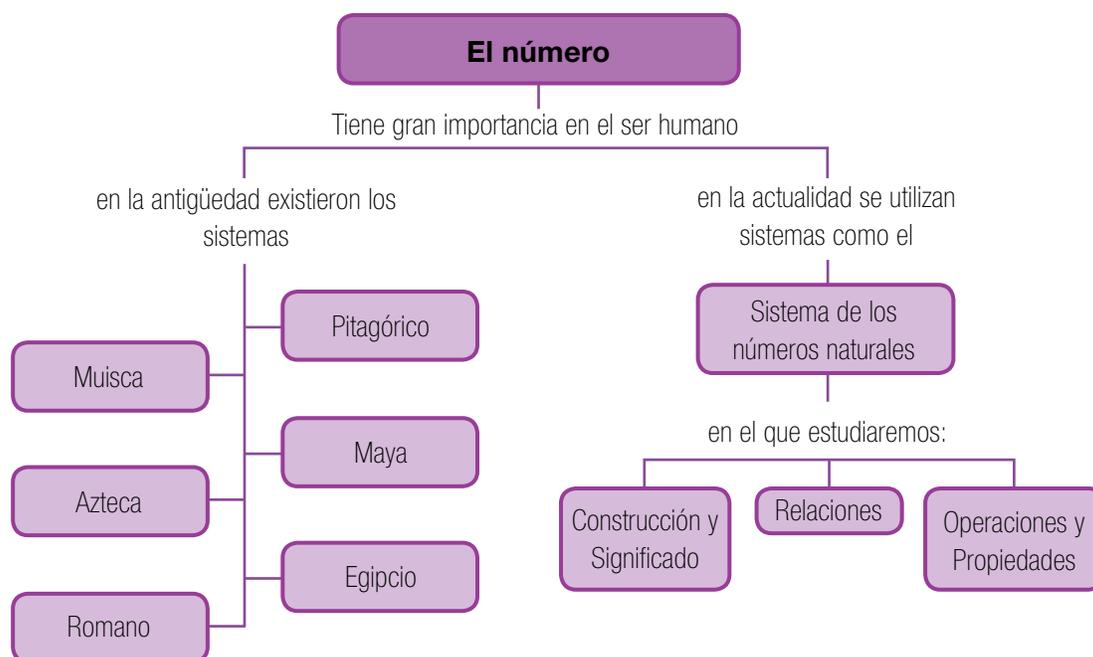
La aritmética es la rama de las matemáticas que estudia las estructuras elementales de los números (Naturales, Racionales,...), sus propiedades y operaciones.

Un gran avance en las matemáticas se dio a partir de la contribución que hicieron las culturas milenarias como la egipcia, la romana, la azteca, la babilónica y la maya entre otras, a través de sus sistemas de numeración.

Los avances en el desarrollo de las aplicaciones matemáticas son verdaderamente asombrosos, especialmente en la medicina, en la construcción de puentes o máquinas, así como en las producciones agrícolas y ganaderas en donde se contabilizan las inversiones y las producciones.

Las operaciones fundamentales (suma, resta, multiplicación y división), con sus propiedades, que estudiaremos aquí, serán de gran utilidad en la resolución de problemas que requieren el conocimiento de las propiedades y relaciones de los números Naturales.

Piensa en la importancia y utilidad de las matemáticas.



# Tema 1. Identifico regularidades numéricas en situaciones de conteo y agrupación



**Indagación**  
Vamos a jugar con números

Juega a lanzar dos dados y suma los números que salen en las caras superiores.

Por ejemplo si uno de los dados cayó en cinco y el otro en seis, la suma es once.



Ayuda a completar la tabla siguiente que muestra todas las posibles sumas de los puntos de las caras superiores, que se obtienen al lanzar dos dados.

Para que la suma sea 2, solamente hay una forma de obtenerla sin repetición: 1+1.

Para que la suma sea 3, hay dos formas de obtenerla sin repetición: 1+2 y 2+1.

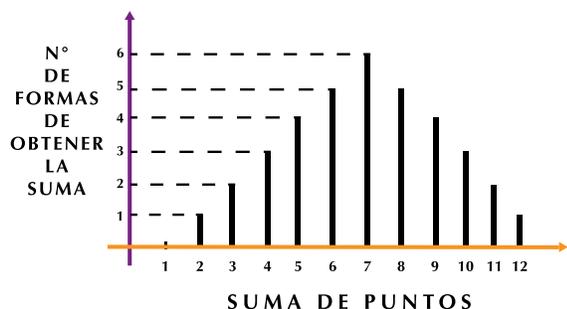
Para que la suma sea 4, hay tres formas de obtenerla sin repetición: 2+2, 3+1 y 1+3

Copia la actividad siguiente en tu cuaderno, complétala y compárala con dos o

Suma de puntos	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Formas de obtener las sumas	1+1	1+2 2+1	1+3 3+1 2+2	2+3 3+2 4+1 1+4							
Cuenta el número de obtener la suma	1	2	3	4							

tres compañeros.

LANZAMIENTO DE DADOS



La información de la tabla anterior puede representarse en la gráfica siguiente:

Observa la gráfica anterior y verifica que cada barra parte de un valor de la suma de puntos (valor en la horizontal) y llega a una altura correspondiente al número de formas de obtenerla (valor en la vertical).

Por ejemplo, la barra que parte de 7 en la horizontal, alcanza una altura de 6 en la

vertical, significa que:

Los valores de la horizontal que tienen altura 1 son \_\_\_\_\_ y \_\_\_\_\_

Los valores de la horizontal que tienen altura 2 son \_\_\_\_\_ y \_\_\_\_\_

Los valores de la horizontal que tienen altura 3 son \_\_\_\_\_ y \_\_\_\_\_

Los valores de la horizontal que tienen altura 4 son \_\_\_\_\_ y \_\_\_\_\_

Los valores de la horizontal que tienen altura 5 son \_\_\_\_\_ y \_\_\_\_\_

Los valores de la horizontal que tienen altura 6 son \_\_\_\_\_ y \_\_\_\_\_

La suma de puntos que puede ocurrir más veces es \_\_\_\_\_

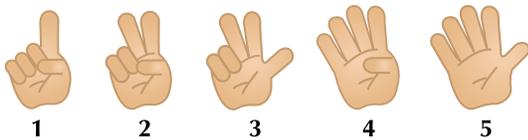
Las sumas de puntos que pueden ocurrir menos veces son \_\_\_\_\_ y \_\_\_\_\_



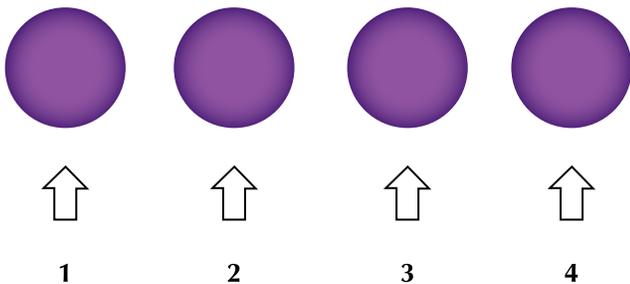
### Conceptualización

A continuación encontrarás el planteamiento de algunas situaciones en las cuales se realiza conteo. Las formas para realizar el conteo son diversas:

Contamos con los dedos de las manos.



Contamos elementos de una colección acumulando uno con el siguiente, por ejemplo círculos.



Cuando llegas al elemento cuatro, has hecho una suma y significa que estás viendo cuatro círculos.

Es importante al contar llevar un orden, porque si se cuenta un objeto dos veces o se deja de contar, el resultado va a estar errado.

Otra forma de contar es de abajo hacia arriba acumulando objetos o señalando uno por uno o también agrupando.

A continuación se te presentan unas situaciones con formas de contar diferentes.

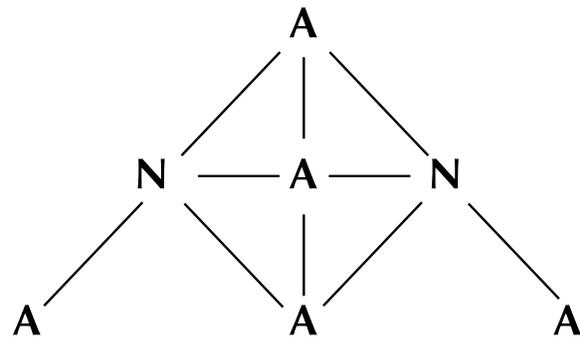
Copia los diagramas en tu cuaderno y resuelve lo que se te pide.

### Situación 1

El diagrama de abajo, muestra una distribución de letras.

Dibuja el diagrama en tu cuaderno y señala con colores los caminos posibles que puedes seguir para formar la palabra "ANA".

Cuenta el número de caminos y escribe ese valor.



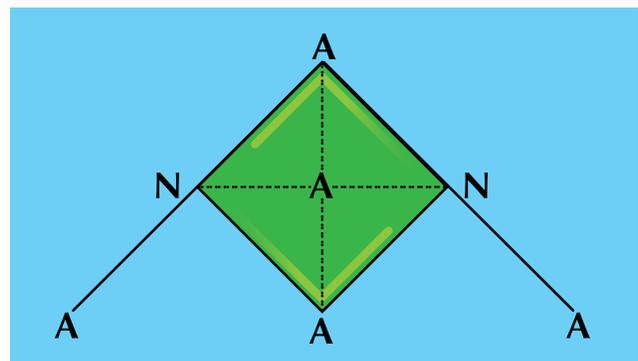
Los símbolos diferentes utilizados para formar la palabra ANA son dos:

A y N, entonces puede generar una base 2 y los grupos de letras se forman de tres en tres.

Por los caminos de la palabra ANA se ha formado un cuadrado de color verde

Los bordes negros que limitan el cuadrado son sus lados.

Escribe en tu cuaderno, cuántos lados tiene el cuadrado.



La parte de color verde (cuadrado) limitada por los lados, es el interior de la figura y la parte de color azul, es el exterior de la figura llamada cuadrado.

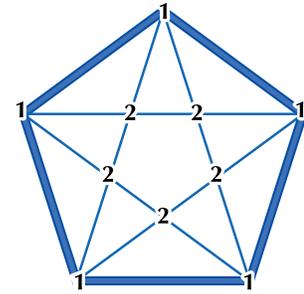
Las líneas punteadas que se ven en el interior del cuadrado (figura verde), son las diagonales de éste.

Cuenta las diagonales que ves y escríbelas en tu cuaderno.

**Situación 2**

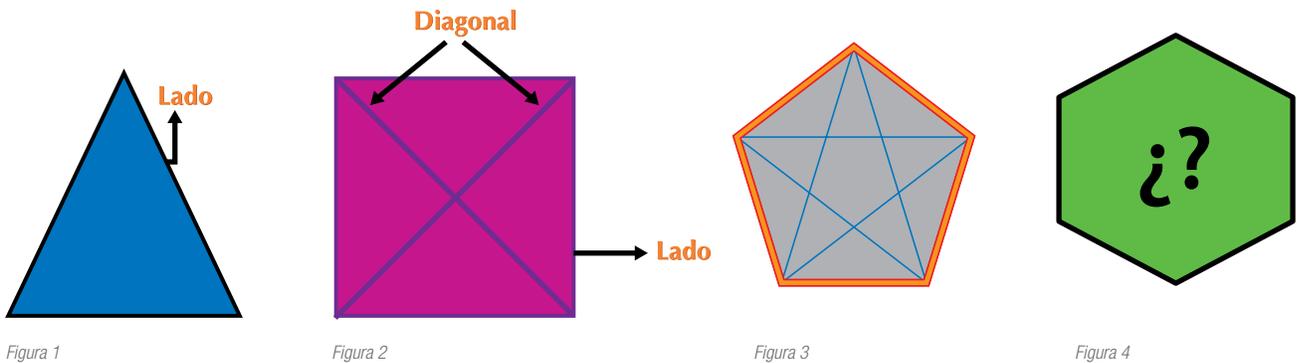
En la gráfica siguiente, cuenta el número de caminos para formar el número 1221 y anótalos en tu cuaderno.

Los símbolos diferentes, utilizados para formar el número 1221 son dos: el 1 y el 2, entonces puede generar una base dos.



**Situación 3**

Observa las figuras 1, 2, 3 y 4 que aparecen a continuación.



La disposición de las figuras se ha arreglado, teniendo en cuenta el número de lados.

En tu cuaderno, debes copiar la siguiente tabla y completarla. Para ello debes contar los lados y las diagonales en cada figura.

Número de la figura	Nombre de la figura	Número de lados	Número de diagonales
1	Triángulo		
2	Cuadrilátero		
3	Pentágono		
4	Hexágono		

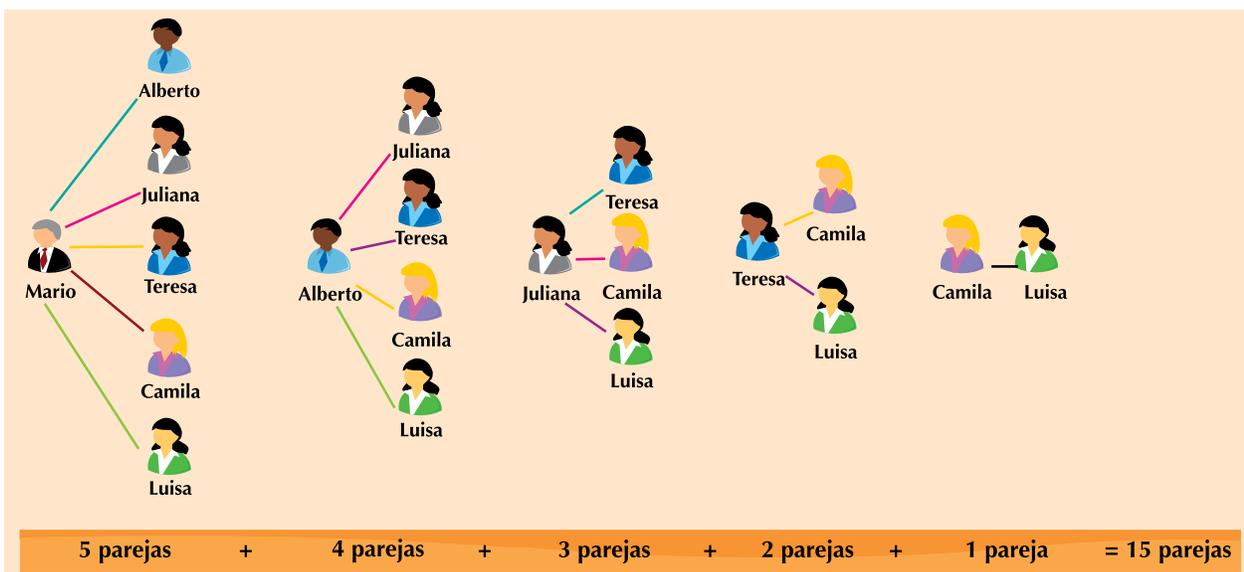
**Situación 4**

Una empresa productora de papel solicita a través de aviso radial la vinculación de dos personas para el área de producción y como aspirantes se han presentado seis personas que cumplen con los requisitos exigidos para el cargo.

¿De cuántas formas se pueden seleccionar dos personas distintas para el cargo? Sugerencia:

Como de las 6 personas, solo seleccionan 2, entonces recuerda formar grupos de dos en dos, sin importar el orden. Un arreglo como este, en que no importa el orden, recibe el nombre de combinación.

### Diagrama de árbol



Como puedes ver, con seis personas diferentes se forman 15 grupos de dos personas cada uno.

Hemos analizado situaciones que nos dan la idea de base, así podemos decir que:

**El grupo de símbolos diferentes, que tiene un sistema de numeración y con el que se puede escribir cualquier otro número del mismo sistema, se llama base.**

Así:

La base 2 tiene dos elementos diferentes y agrupa las unidades de dos en dos.

La base 3 tiene tres elementos diferentes y agrupa las unidades de tres en tres.

La base 6 tiene seis elementos diferentes y agrupa las unidades de seis en seis.

La base 10 tiene diez elementos diferentes y agrupa las unidades de diez en diez.



### Aplicación

Analiza los dos problemas siguientes y responde en tu cuaderno los interrogantes.

Compara y discute tus respuestas, con dos o tres compañeros.

1. Un equipo de fútbol tiene tres camisetas de diferente color y dos pantalonetas una blanca y otra negra.

		FILAS		
C O L U M N A S	camisetas			
	pantalonetas	 ↓ 		

¿De cuántas formas posibles se puede uniformar el equipo?

El diagrama de arriba te ayudará a encontrar la solución.

Copia el diagrama en tu cuaderno y completa los colores respectivos para la camiseta y la pantaloneta que conformarán cada uniforme.

Con las dos pantalonetas y las tres camisetas, ¿cuántos uniformes tiene el equipo?

2. En cada círculo que forma parte del triángulo de la figura A, debes escribir un número del 1 al 9, de tal manera que sumando los números de los cuatro círculos de cada lado, resulte siempre 17.

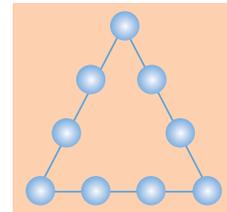


Figura A

3. En la figura B hay triángulos grandes, medianos y pequeños. ¿Cuántos triángulos hay en total?

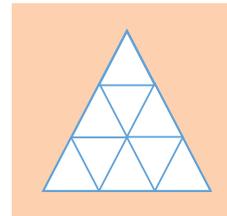
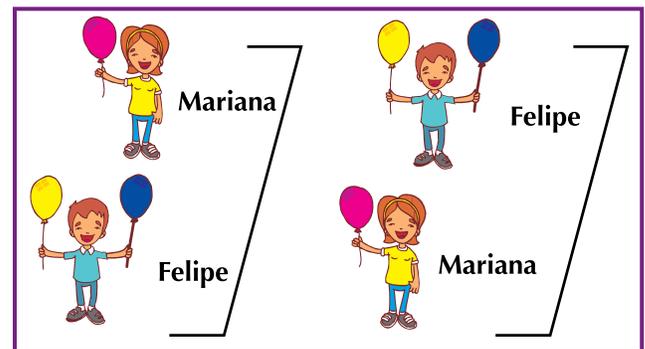
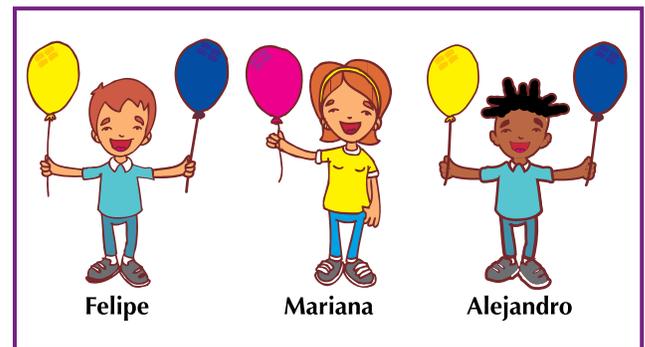


Figura B

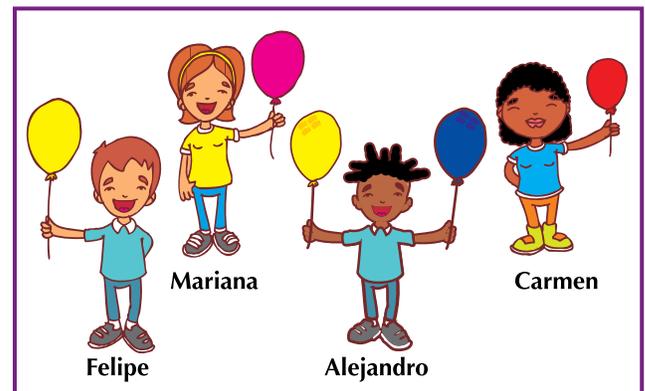
4. Felipe y Mariana pueden ubicarse uno detrás del otro de dos formas diferentes, si Felipe se representa con la letra F y Mariana con la letra M, los arreglos son: FM (Felipe adelante y Mariana atrás); MF (Mariana adelante y Felipe atrás).



5. ¿De cuántas formas diferentes pueden ubicarse uno detrás del otro: Felipe, Mariana y Alejandro? Escribe todos los arreglos.



6. ¿De cuántas formas diferentes pueden ubicarse, uno atrás de otro: Felipe (F), Mariana (M), Alejandro (A) y Carmen (C)? Escribe todos los arreglos.



### Entendemos por...

**Combinación** aquel arreglo de elementos en donde nos interesa formar grupos sin importar el orden.

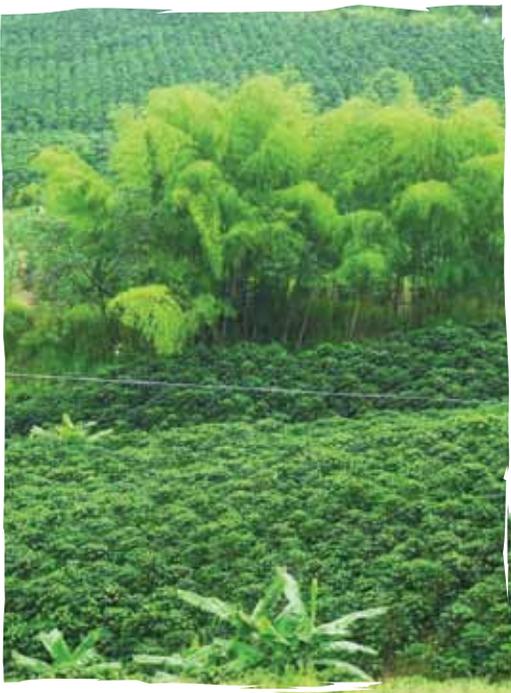
Cuando nos vestimos, elegimos combinaciones de las piezas que conforman el vestido que vamos a lucir (ropa interior, camiseta o camisa, pantalón, medias y zapatos).

### Diversión matemática

#### Combinando vestidos

Juanita quiere vestir su muñeca y tiene para ello un pantalón azul, una falda roja y dos blusas: una blanca y otra amarilla.

Ayuda a Juanita a combinar todos los posibles vestidos que pueda lucir su muñeca.



### Día a día

#### Permacultura

La permacultura o agricultura permanente es la agricultura ecológica.

En ella deben existir por lo menos las zonas siguientes:

- A. Zona de huertos (bancales hortalizas).
- B. Zona de curcubitáceas: calabazas, papas y batatas.
- C. Zona de Frutales.
- D. Zona de Forraje-Cereales.

Tanto la zona A como la zona C, serán fijas, pero la zona B con la zona D se pueden cambiar.

En la zona de huertos una vez hecho los bancales, jamás se vuelve a cavar.

También habrá una zona para corrales, debido a la necesidad de ser más autosuficiente.

El organizar la finca en zonas, permite al agricultor llevar un mejor orden en el conteo de los insumos y cosechas logrando así un control en la producción y cuidado del suelo.

Información de: <http://www.rinconesdelatlantico.com/num2/permacultura.html>

# Tema 2. Formas de conteo a través de la historia



## Indagación

Los sistemas de numeración se caracterizan por tener símbolos para representar los números, con los que se pueden hacer algunas operaciones básicas como: suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación. Cada operación tiene sus propiedades, de acuerdo con el sistema numérico y también cada una de ellas combina símbolos y signos.

Así, el sistema de numeración decimal tiene diez símbolos diferentes: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, estos son los dígitos y los arreglos grupales se hacen de diez en diez, razón por la cual, es un sistema en base diez.



Por ejemplo:

La gráfica de arriba muestra 23 estrellitas organizadas en 2 grupos de 10 cada uno y 3 estrellitas sueltas.

Elas representan el número 23 en base 10.

También existen otras formas de agrupar que generan bases diferentes. Así por ejemplo, con solo 2 símbolos diferentes puede conformarse el sistema en base 2, llamado sistema binario (lenguaje de los computadores, con el 0 y el 1), con 5 símbolos diferentes puede conformarse el sistema quinario y así veremos otros sistemas que a lo largo de miles de años han surgido en varios lugares del planeta.

Ahora imagina que tú eres un hombre primitivo, dueño de una cantidad de ovejas, que estás viviendo en una época y lugar en donde todavía no existen los números.

¿Cómo harías para llevar un registro escrito de la cantidad de tus ovejas?

Discútelo con tus compañeros.



## Conceptualización Números triangulares o pitagóricos

Para los pitagóricos que vivieron en el siglo V a.C. (siglo 5° antes del nacimiento de Cristo), la representación de los números estaba conformada por conjuntos de puntos dispuestos geoméricamente, como se muestra en la figura 1.

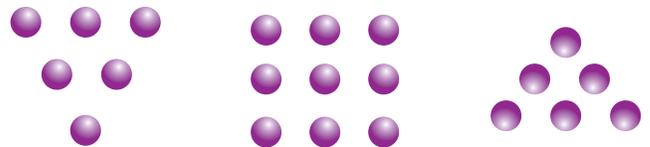


Figura 1

Los arreglos formados por puntos y formas de triángulos dan origen a los llamados números triangulares. Tales números triangulares son: 1, 3, 6, 10, 15, ... Aunque un solo punto no forma un triángulo, por convención (acuerdo) se acepta que el 1 es número triangular.

Para los números 3, 6, 10, 15, etc. la representación pitagórica es un arreglo triangular, cuyo valor es la suma de los puntos que están dispuestos diagonalmente de izquierda a derecha, como se muestra en la figura 2.

Arreglos triangulares pitagóricos					
Número	1	3	6	10	15
Representación					
Composición	1	1+2	1+2+3	1+2+3+4	1+2+3+4+5
Posición	1°	2°	3°	4°	5°

Figura 2

En tu cuaderno, copia y completa la tabla siguiente, en la cual quedará organizada la información correspondiente a las sumas de los arreglos de los primeros ocho números triangulares.

Números triangulares

Posición	Arreglo	N° de puntos
1a	1	1
2a	1 + 2	3
3a	1 + 2 + 3	
4a	1 + 2 + 3 + 4	10
5a	1 + 2 + 3 + 4 + 5	15
6a	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6	
7a	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7	28
8a	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8	

Tabla 1

Discute con algunos compañeros cuántos puntos debe tener el arreglo que ocupa la posición 9ª y la 22ª en la tabla 1 y escribe en tu cuaderno, con tus palabras el proceso utilizado para saber cuál es el número de puntos para cualquier posición en la tabla N° 1.

La suma de 2 números triangulares consecutivos, da origen a números que son cuadrados.

Observa las representaciones siguientes, en la Figura 3 y en la Figura 4.



Figura 3

1 + 3 = 4 que es el cuadrado de 2



Figura 4

3 + 6 = 9 que es el cuadrado de 3

Por lo tanto, como pudiste ver

**La suma de dos números triangulares consecutivos da como resultado un número cuadrado.**

En tu cuaderno, representa la formación del número cuadrado 4, utilizando los números triangulares consecutivos 1 y 3.

## Numeración muisca

### ¿Quiénes fueron los muisca?

Los Muisca habitaron entre los altiplanos y valles de la cordillera Oriental colombiana, principalmente entre el macizo de Sumapaz y el nevado del Cocuy, a lo largo de los ríos Bogotá, Suárez y Chicamocha.

La zona más poblada fue la sabana cundiboyacense, entre ellas, Bogotá, Nemocón, Ubaté, Chiquinquirá, Tunja y Sogamoso.

Fue el grupo de lengua chibcha más importante de los Andes colombianos, que ocupó la zona aproximadamente 1,000 después del nacimiento de Cristo.

Sobresalieron por su habilidad como mercaderes, practicaron el intercambio mercantil.

Uno de los principales productos que los Muisca intercambiaron a través del sistema de trueque fue la sal, a cambio de la cual recibían oro, esmeraldas,



amatistas y topacios que luego trabajaban a su manera para volverlo a intercambiar.

Llegaron a establecer tasas de interés sobre créditos comerciales, lo que quedó sustentado en una legislación de acuerdos comerciales entre las partes, que debía respetarse, so pena de recibir sanción de tipo social o económico, mediante la confiscación de sus bienes. También usaban como monedas discos de oro.

Utilizaron el sistema basado en los dedos de las manos y de los pies para contar; al llegar al veinte, comenzaban otra veintena; el palmo y el pie fueron sus medidas de longitud.

Existen los escritos del Padre José Domingo Duquesne (1748-1821), sacerdote bogotano quien afirma que los Muiscas conocieron guarismos para representar las cantidades numéricas y presenta un conjunto de símbolos gráficos representando dichos guarismos en un sistema vigesimal (20 símbolos).

Las ciencias estaban representadas por la astronomía, la meteorología y la confección de un calendario que servía de base para la agricultura, ya que los cultivos dependían directamente del comportamiento del sol (Zué) y de la Luna (Chía). Dividían el año solar en cuatro épocas, delimitadas por los períodos de invierno y verano, que a su vez se subdividían de acuerdo a los cambios lunares.

información de: <http://pwp.supercabletv.net.co/garcru/colombia/colombia/indios.html> los muiscas

## Numeración maya

Entre los antiguos sistemas de numeración se encontraba el que usó la civilización Maya en América.

La primera que empleó el principio de posición, a la vez que utilizó un símbolo para el cero.

Es importante resaltar que sin ninguna influencia de las culturas de Medio Oriente, los sacerdotes mayas crearon un sistema de numeración con el empleo de sólo tres símbolos, los cuales se encuentran representados en sus calendarios y relaciones astronómicas.

Los tres símbolos básicos empleados en el sistema de numeración maya son:

- Representa 1 unidad.
- Representa 5 unidades.
- ⊙ Representa la carencia de unidades, esto es el 0.

En la numeración maya se aplica el principio aditivo y los números del uno al diecinueve se representan de la siguiente manera:

	•	••	•••	••••
0	1	2	3	4
—	•—	••—	•••—	••••—
5	6	7	8	9
≡	•≡	••≡	•••≡	••••≡
10	11	12	13	14
≡	•≡	••≡	•••≡	••••≡
15	16	17	18	19

Para los números mayores que diecinueve empleaban el principio posicional y el cero, debido a que su sistema numérico era vigesimal, es decir, tenía como base el número veinte (porque tenía 20 símbolos distintos).

- Quinta posición: 20 grupos de 8,000 equivalen a  $20 \times 20 \times 20 \times 20 = 160,000$ , es decir  $20^4 = 160,000$ .
- Cuarta posición: 20 grupos de 400 equivalen a  $20 \times 20 \times 20 = 8,000$ , es decir  $20^3 = 8,000$ .
- Tercera posición: 20 grupos de 20, equivalen a  $20 \times 20 = 400$ , es decir  $20^2 = 400$ .
- Segunda posición: 1 grupo de 20 equivalen a 20, es decir  $20^1 = 20$ .
- Primera posición: Elementos no agrupados.

En este sistema, los mayas escribían sus números en forma vertical, de abajo hacia arriba, y en este orden cada renglón determina una posición.

Para representar números iguales o mayores que veinte, se multiplica el valor numérico de cada posición por la potencia de veinte correspondiente y, en seguida, se suman los productos parciales.

### Ejemplo 1

Cuarta posición	•	$= 1 \times 20^3 = 1 \times 8,000 = 8,000$			
Tercera posición	• •	$= 2 \times 20^2 = 2 \times 400 = 800$			
Segunda posición	••••	$= 8 \times 20^1 = 8 \times 20 = 160$			
Primera posición	••••	$=$		13 elementos no agrupados	
				8,973	

### Ejemplo 2

Segunda posición	•	$= 1 \times 20^1 = 1 \times 20 = 20$			
Primera posición	⊙	$=$		$\frac{+0 \text{ elementos no agrupados}}{20}$	

De los ejemplos anteriores, puedes deducir que:

***El sistema de numeración maya fue posicional porque cada símbolo tenía un valor determinado según la posición que ocupara. La base del sistema de numeración maya era 20.***

***El sistema de numeración maya utilizó un símbolo para el cero.***

### Numeración azteca

En México, entre los siglos XIV y XVI de nuestra era (1500 a 1700) se desarrolló la civilización azteca. Los aztecas crearon un sistema de cifras que conocemos a partir de manuscritos que los especialistas llaman Codex.

En ellos los escribas expresaban por escrito los resultados de sus inventarios y el recuento de los tributos recogidos por el imperio reproduciendo cada cifra tantas veces como fuera necesario junto a los pictogramas asociados.

Esta numeración se basa en el principio aditivo según el cual el valor de una representación se obtiene sumando los valores de las cifras. Era una numeración de base vigesimal.

A continuación se presentan algunos símbolos y valores del sistema de numeración azteca.

- = Uno
- = Dos
- = Tres
- = Cuatro
- = Cinco
- = Seis
- = Siete
- = Ocho
- = Nueve

Como puedes observar, los aztecas utilizaban puntos o disquitos para los números que van del 1 al 9.

Para otros números se empleaban símbolos convencionales o jeroglíficos: un rombo, una bandera, un tapete, un sol, un árbol o abeto y finalmente una bolsa.

- ◊ = Diez
- ▣ = Quince
- ▢ = Veinte
- ▧ = Sesenta
- ☀ = Ochenta
- ☀☀ = Cuatrocientos
- ☀☀☀ = Ocho mil

Otros números del sistema azteca son:

Para algunos números, los aztecas usaban parte de los símbolos, como por ejemplo:

◊ • = 11      ▣ ••• = 23

☀ ▣ ▣ •• = 123

Escribe en tu cuaderno dos formas de representar el 5 y el 18 en sistema de numeración azteca.

▣ = 20      ▣ = 15  
 ▣ = 10      ▣ = 5

### Numeración egipcia

Cientos de años antes que los griegos, los egipcios tenían un sistema de numeración, como lo prueban los jeroglíficos tallados en monumentos y papiros, como el del Rhind, escrito por el escriba Ahmes aproximadamente en el año 1650 antes de Cristo.

En la tabla N° 2 se presentan algunos símbolos de la numeración egipcia, sus nombres y el valor que les corresponde en la numeración decimal (base 10), la más utilizada en la actualidad.

La base de numeración egipcia es diez, como se ve a continuación:

Símbolo	Nombre	Valor en el sistema decimal
	Bastón	1
∩	Talón	10
∩∩	Cuerda enrollada	100
∩∩∩	Flor de loto	1,000
☞	Dedo señalando	10,000
☞☞	Pez o ballena	100,000

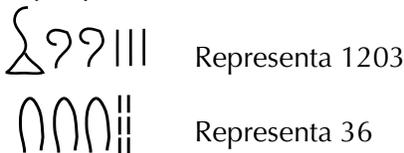
Tabla 2

Elementos no agrupados

- 1 grupo de 10 equivale a 10, es decir:  $10^1 = 10$
- 10 grupos de 10 equivalen a  $10 \times 10 = 100$ , es decir:  $10^2 = 100$
- 10 grupos de 100 equivalen a  $10 \times 10 \times 10 = 1,000$ , es decir:  $10^3 = 1,000$
- 10 grupos de 1000 equivalen a  $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10,000$ , es decir:  $10^4 = 10,000$
- 10 grupos de 10,000 equivalen a  $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100,000$ , es decir:  $10^5 = 100,000$

Para escribir y leer los diferentes números que se representaban en el sistema de numeración egipcio, se debía efectuar la suma de los símbolos empleados.

Por ejemplo:



También en Europa, surgió el sistema de numeración romano, el cual se utiliza aún en nuestro medio para designar épocas referidas a siglos y en los tableros de algunos relojes, entre otros.

**Numeración romana**

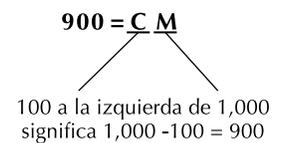
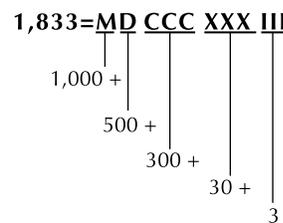
En el sistema romano, los símbolos que representan los números son algunas letras del alfabeto y cada una tiene un valor decimal equivalente determinado, como lo puedes ver en las tablas siguientes:

Símbolos fundamentales	Valor
I	1
X	10
C	100
M	1,000

Símbolos secundarios	Valor
V	5
L	50
D	500

Para representar números en el sistema romano, se combinan los símbolos, teniendo en cuenta las reglas siguientes:

1. Cada símbolo tiene un valor único.  
 $I = 1$     $X = 10$     $C = 100$     $M = 1,000$     $V = 5$   
 $L = 50$     $D = 500$ .
1. Los símbolos I, X y C pueden repetirse hasta tres veces en un mismo número.  
 $300 = CCC$  pero  $400 = 500 - 100 = CD$ .
1. Se cumplen los principios de adición y sustracción.



1. Una raya sobre la letra, multiplica el número por 1,000. Ejemplo,  $V=5$  y  $\bar{V}=5,000$

En la actualidad, el sistema de numeración más utilizado en el mundo es el Sistema de Numeración Decimal, que es el que utilizamos en nuestra vida cotidiana, conocido también como Sistema de Numeración Decimal Indoarábigo, porque según evidencias, tuvo su origen en la India, un país del continente Asiático y fueron los árabes, de Asia también, quienes lo enseñaron a Europa.

Se llama Decimal porque su base es el número 10 y es un sistema posicional porque los números adquieren diferentes valores dependiendo de la posición que ocupen. Así, en el número 57, el dígito 7 vale siete unidades y el dígito 5 vale cincuenta unidades.

**Sistema de numeración decimal**

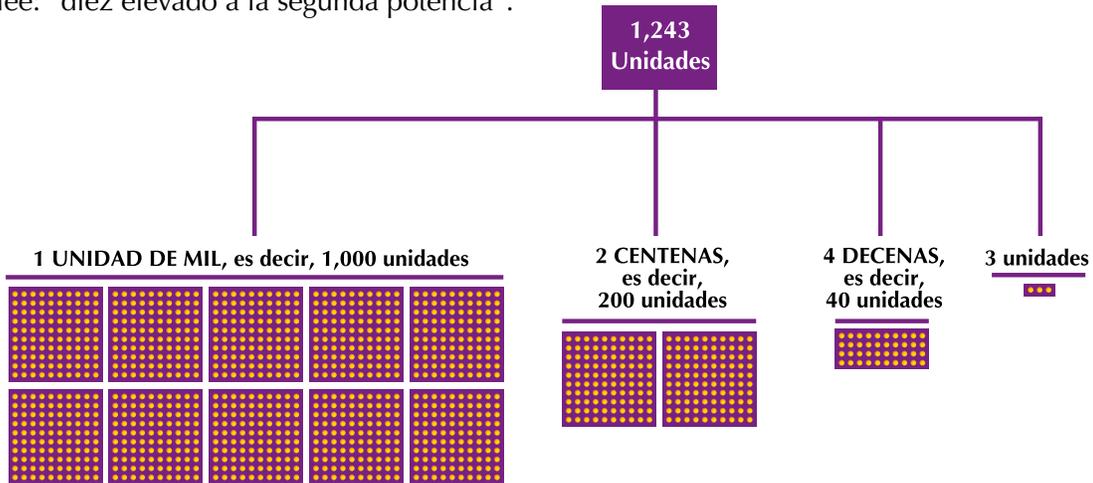
En el sistema de numeración decimal los diez símbolos diferentes son: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (conocidos también como números dígitos) y haciendo agrupaciones de 10 en 10, hasta ocupar una posición de orden superior de derecha a izquierda obtenemos el valor relativo de los diferentes dígitos de un número.

Cada 10 unidades forman 1 decena y cada 10 decenas 1 centena (100 unidades).

El esquema siguiente muestra los grupos que se forman sucesivamente en el sistema posicional decimal para el número 1,243. (mil doscientos cuarenta y tres).

- Un grupo de diez unidades  $10 = 10^1$ .
- Un grupo de cien unidades  $100 = 10 \times 10 = 10^2$  y se lee: "diez elevado a la segunda potencia".

- Un grupo de mil unidades  $1,000 = 100 \times 10 = 10 \times 10 \times 10 = 10^3$  y se lee: "diez elevado a la tercera potencia".
- Un grupo de una decena de mil  $10,000 = 1,000 \times 10 = 100 \times 10 \times 10 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4$  y se lee: "diez elevado a la cuarta potencia".



Si tienes diez grupos de centenas, es decir 10 grupos de 100 unidades cada uno, formarás el grupo de las unidades de mil.

Así, en el número 5,648, el 8 equivale a 8 unidades, el 4 a 40 unidades, el 6 a 600 unidades y el 5 a 5,000 unidades. En otras palabras, el número 5,648 es el resultado de la operación  $8 + 40 + 600 + 5,000$ .

En 5,648 unidades hay:

En la tabla siguiente muestra la descomposición del número 5,648 en unidades, decenas, centenas y unidades de mil.

	Unidades de mil	Centenas	Decenas	Unidades
				8
			4	0
	6	0	0	0
5	0	0	0	0
5	6	4	8	
Total	$5 \times 10^3$	$6 \times 10^2$	$4 \times 10^1$	8

También puede expresarse como la suma de cada dígito multiplicado por su respectiva potencia de 10, correspondiente a su posición desde las unidades, así:

$$5,648 = \underbrace{5 \times 10^3}_{\text{Unidades de mil}} + \underbrace{6 \times 10^2}_{\text{Centenas}} + \underbrace{4 \times 10^1}_{\text{Decenas}} + \underbrace{8}_{\text{Unidades}}$$

Observa que en el número 5,648 el valor relativo de 6, que está en el tercer lugar de derecha a izquierda, es 600, que equivale a  $6 \times 100$ , es decir, 6 centenas porque 1 centena = 100 unidades. Por lo tanto, puede afirmarse que el sistema de numeración decimal es un sistema posicional y aditivo en base 10.

### Sistema de numeración binaria (0,1)

Además del sistema de numeración en base 10, hoy en día en el mundo se usan, otros sistemas posicionales importantes, como es el caso del sistema de numeración binario, que tiene solamente dos símbolos distintos: el cero y el uno.

Su importancia radica en que este sistema se aplica en el funcionamiento y manejo de los computadores, cuyo uso se hace cada día más común.

El sistema de numeración binario fue un aporte del matemático alemán Guillermo Leibniz (1646 - 1716). La base para agrupar estos símbolos es dos, de manera que se arreglan de dos en dos y cuando hay más de un grupo de dos se hace una nueva agrupación, y así sucesivamente.

Elementos no agrupados

1 grupo de 2 elementos equivale a 2, es decir  $2^1 = 2$ .

2 grupos de 2 elementos equivalen a  $2 \times 2 = 4$ , es decir  $2^2 = 4$ .

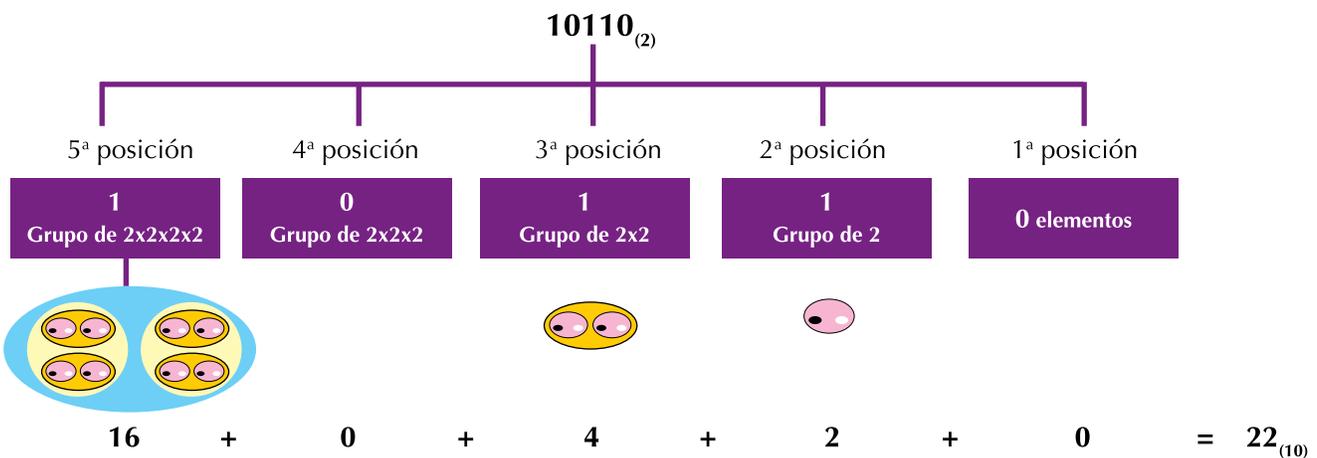
2 grupos de 4 elementos equivalen a  $2 \times 4 = 2 \times 2 \times 2 = 8$ , es decir  $2^3 = 8$ .

2 grupos de 8 elementos equivalen a  $2 \times 8 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ , es decir  $2^4 = 16$ .

Por ejemplo:

El número 10110 en base 2, corresponde al número 22 en base 10.

Para buscar el equivalente en base 10, de un número expresado en base dos, se procede de derecha a izquierda multiplicando cada cifra por 2 elevado a la potencia con exponente 0, 1, 2, 3, según la posición que ocupe.



Estudia los ejemplos siguientes, con dos o tres compañeros:

1. Escribe en Sistema de numeración decimal el número:

a. Binario: 1101<sub>2</sub>

Solución:

Cuarta posición	Tercera posición	Segunda posición	Primera posición	
$1 \times 2^3$	+	$1 \times 2^2$	+	$0 \times 2^1$
$1 \times 8$	+	$1 \times 4$	+	1
8	+	0	+	1
				= 13

Por lo tanto el número 1101<sub>2</sub> (se lee: 1101 en base 2) equivale a 13 (se lee: 13 en base 10).

b). Verifica que 11111 en base 2 equivale a 31 en base 10.

Solución:

Quinta posición		Cuarta posición		Tercera posición		Segunda posición		Primera posición	
$1 \times 2^4$	+	$1 \times 2^3$	+	$0 \times 2^2$	+	$1 \times 2^1$	+	1	=
$1 \times 16$	+	$1 \times 8$	+	$1 \times 4$	+	$1 \times 2$	+	1	=
16	+	8	+	4	+	2	+	1	= 31

Por lo tanto el número  $1101_2$  (se lee: 1101 en base 2) equivale a 13 (se lee: 13 en base 10).

2. Dado el valor relativo de cada cifra, descubre el número.

Se tiene: 1 grupo de  $2 \times 2 \times 2$ , 0 grupo de  $2 \times 2$ , 1 grupo de 2 y 1 punto suelto,

a. ¿Cuál es el número en base 2?

b. ¿Cuál es el número en base 10?

Solución

a. 1 grupo de $2 \times 2 \times 2$	→	1 $\times 2^3$ indica 1 en 4ª posición	}	el número $1011_2$ en base 2 se escribe $1011_2$
0 grupo de $2 \times 2$	→	0 $\times 2^2$ indica 0 en 3ª posición		
1 grupo de 2	→	1 $\times 2^1$ indica 1 en 2ª posición		
1 punto suelto	→	1 indica 1 en 1ª posición		
b. 1 grupo de $2 \times 2 \times 2$	→	1 $\times 2^3 = 1 \times 8$	→	8 +
0 grupo de $2 \times 2$	→	0 $\times 2^2 = 0 \times 4$	→	0
1 grupo de 2	→	1 $\times 2^1 = 1 \times 2$	→	2
1 punto suelto	→	1	→	<u>1</u>
				11

El número  $1011_2$  corresponde a 11, esto es: 1011 en base 2 equivale a 11 en base 10.

3. La siguiente tabla muestra el conteo de los 15 primeros números binarios y sus equivalencias en el sistema decimal.

En sistema binario				sistema decimal
4ª posición	3ª posición	2ª posición	1ª posición	
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	2
0	0	1	1	3
0	1	0	0	4
0	1	0	1	5
0	1	1	0	6
0	1	1	1	7
1	0	0	0	8
1	0	0	1	9
1	0	1	0	10
1	0	1	1	11
1	1	0	0	12
1	1	0	1	13
1	1	1	0	14
1	1	1	1	15

4. Verifica tres de las equivalencias presentadas en la tabla como lo indica el ejemplo:

$$1100_2 = 12_{10}$$

Comprobémoslo así:

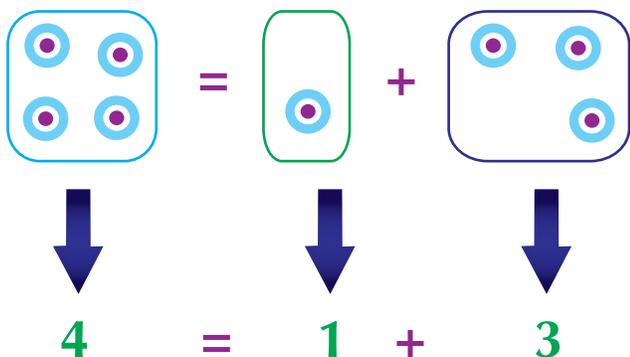
$$\begin{array}{r} 1 \text{ grupo de } 2 \times 2 \times 2 = 8 \\ 1 \text{ grupo de } 2 \times 2 = 4 \\ 0 \text{ grupo de } 2 = 0 \\ 0 \text{ elementos sueltos} = \underline{0} \\ \hline 12 \end{array}$$



### Aplicación

Para trabajar las actividades que siguen, debes copiar las situaciones en tu cuaderno y resolverlas con tus compañeros.

Por ejemplo: El número pitagórico 4, se puede descomponer gráficamente como la suma de dos números triangulares consecutivos: 1+3.

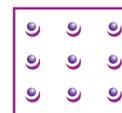


**Recuerda que los números pitagóricos 1, 3, 6, 10, 15, etc., tienen un arreglo triangular en su representación gráfica y el valor de cada uno es la suma de los dos números anteriores, cuyos puntos están dispuestos diagonalmente de izquierda a derecha.**

**NOTA:** Cuando no se escribe la base de un número, se asume que ésta es decimal (10).

1. Representa gráficamente la descomposición pitagórica de cada número dado.

a. Número 9 →



b. Número 16 →

c. Número 25 →

d. Número 81 →

2. Escribe las decenas de millón que tiene cada número:

- a. 345,061,410.
- b. 1,518,433,001.
- c. 946,642.

3. Dado el número 845,042 identifica la cifra de:

- a. Las decenas.
- b. Las centenas.
- c. Las unidades de mil.
- d. Las centenas de mil.

4. Escribe el número que tiene:

- a. 4 decenas de mil, 2 unidades, 0 centenas, 1 unidad de mil y 7 decenas.
- b. 7 Unidades de millón, 4 centenas y 3 unidades.
- c. 9 centenas de millón, 2 unidades de millón, 7 decenas y 1 unidad.
- d. 2 decenas de millón, 4 unidades de millón, 8 unidades de mil y 1 decena.

5. Escribe con palabras cada número:

- a. 7,416.
- b. 135,008.
- c. 24'402,683.
- d. 800'724,001.

6. Escribe el valor posicional de la cifra señalada:

- a. 53**6**,245
- b. **1**8,416
- c. 45,**6**58 360,288
- d. **5**6 230,341

7. Escribe el número que corresponde a cada expresión:

- a.  $(4 \times 10^4) + (6 \times 10^2) + (1 \times 10^2) + (7 \times 10^1) + 2 =$
- b.  $(5 \times 10^7) + (3 \times 10^6) + (0 \times 10^5) + (2 \times 10^4) + (7 \times 10^3) + (2 \times 10^2) + (9 \times 10^1) + 5 =$
- c.  $(2 \times 10^2) + (9 \times 10^1) + 3 =$
- d.  $(1 \times 10^6) + (5 \times 10^3) + (2 \times 10^2) =$

8. Problema para discutir con los compañeros. Si un número tiene:

- El dígito de las unidades de mil es 5.
- El dígito de las centenas es 2.
- El dígito de las decenas de mil es el doble del dígito de las centenas.
- Las unidades y las decenas de mil tienen el mismo valor y la suma de todos sus dígitos es 22.

El número es

--	--	--	--	--

### Diversión matemática

A la cacería de un 53

Con cinco veces el número 5, tres veces el número 3 y los signos Matemáticos +, -, x, ÷ y ( ) forma expresiones matemáticas que sean igual a 53.



### Entendemos por...

**Número decimal:** cada uno de los dígitos que aparecen en el sistema base 10.

**El sistema métrico decimal:** es el conjunto de pesas y medidas, cuyos elementos son múltiplos o divisores de diez, del patrón de medida correspondiente (longitud, masa, tiempo...), con relaciones u operaciones.

### Día a día

#### El computador

“Computador”, “Computadora” u “Ordenador”, es una máquina electrónica que recibe y procesa datos para convertirlos en información útil.

Ejecuta con exactitud y rapidez instrucciones que son ordenadas, organizadas y sistematizadas.

Este proceso se denomina “programación”, la persona que lo realiza se llama “programador” y la persona que utiliza el servicio o la computadora se llama usuario.

Es una máquina de propósito general, pues realiza tareas en el hogar, el trabajo o el colegio y entretiene. Usa el sistema binario relacionando sus elementos con la de los dispositivos electrónicos: 0 es apagado y 1 es prendido.

<http://thiagoonweb.com/?tag=computadorelectricidad>



# Tema 3. Ordeno y represento el conjunto de los números Naturales ( $\mathbb{N}$ )



## Indagación

Imagina que tienes en mente realizar un proyecto.

Para elaborar el presupuesto de un proyecto, se necesita como mínimo hacer uso de los números naturales, porque con ellos se expresa en términos financieros las metas soñadas.

Imagina el proyecto que quisieras llevar a cabo. Ahora, en tu cuaderno, elabora una lista de las cosas que necesitas, el costo aproximado de cada una de ellas y los otros posibles gastos que deberías realizar para formarte una idea de la cantidad de dinero que requieres.

Comparte tus planes con dos o tres compañeros y conoce los de ellos.



## Conceptualización

El proceso de comparar el número de elementos entre conjuntos es una relación, así por ejemplo, en la ilustración 1, se ve la relación de comparación del número de elementos entre el conjunto A y el conjunto B: Al conejo le corresponde la figura de triángulo, al pez le corresponde la figura de cuadrado, al pájaro le corresponde la de círculo y al perro le corresponde la figura de la estrella.

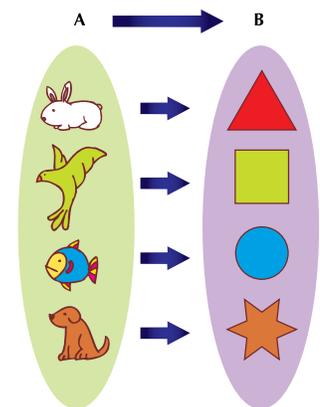


Ilustración 1

Observa que el número de elementos de A es el mismo número de elementos que tiene B.

En ilustración 2, se observa que al elemento ratón del conjunto A no le corresponde algún elemento del conjunto B.

Esto significa que el conjunto A tiene más elementos que el conjunto B.

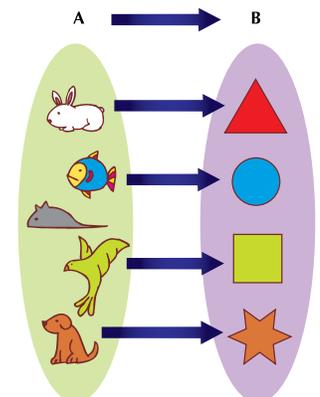
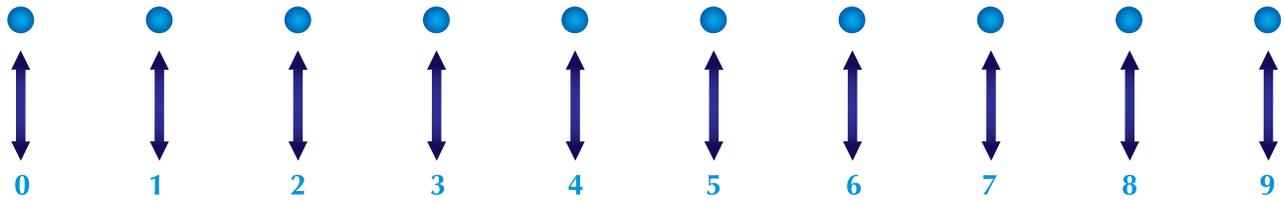


Ilustración 2

Observa que el número de elementos de A es diferente del número de elementos que tiene B.

Los números naturales son la base para contar los elementos de una colección, de una manera ordenada y los símbolos que los representan son: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.



¿Cuántos puntos se podrían dibujar para representar el conjunto de los números naturales (N), de tal manera que a cada número natural le corresponda un único punto y a cada punto le corresponda un único número natural?

Con estos diez símbolos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9) se forman otros números naturales, por ejemplo: 10, 11, 12, 13,.... etc. Así es que la representación simbólica del conjunto de los números naturales es:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \dots\}$$

Puede observarse que en el conjunto de los números naturales (N):

1. El 0 es el primer número.
2. Todos los números Naturales (N) tienen un sucesor: 6 es sucesor de 5, porque 6 es el número que está después de 5.
3. Todo número natural, excepto el cero, tiene un antecesor: 2 es antecesor de 3, porque 2 es el número que está antes de 3.
4. Dos números Naturales (N) diferentes no tienen el mismo sucesor.

Para contar se hace corresponder ordenadamente cada elemento de un conjunto con un número natural, hasta agotar la colección (elementos) como se ve en las ilustraciones 3 y 4 siguientes:

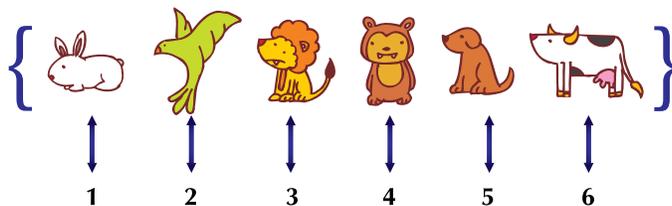


Ilustración 3

El número 4 asignado al elemento oso, es un número ordinal, es decir, el oso ocupa el 4º lugar.

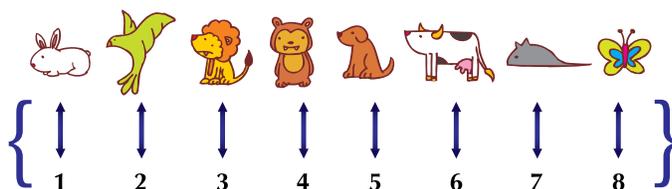


Ilustración 4

El número 8 asignado al último elemento, es un número ordinal y da cuenta del número de objetos del conjunto.

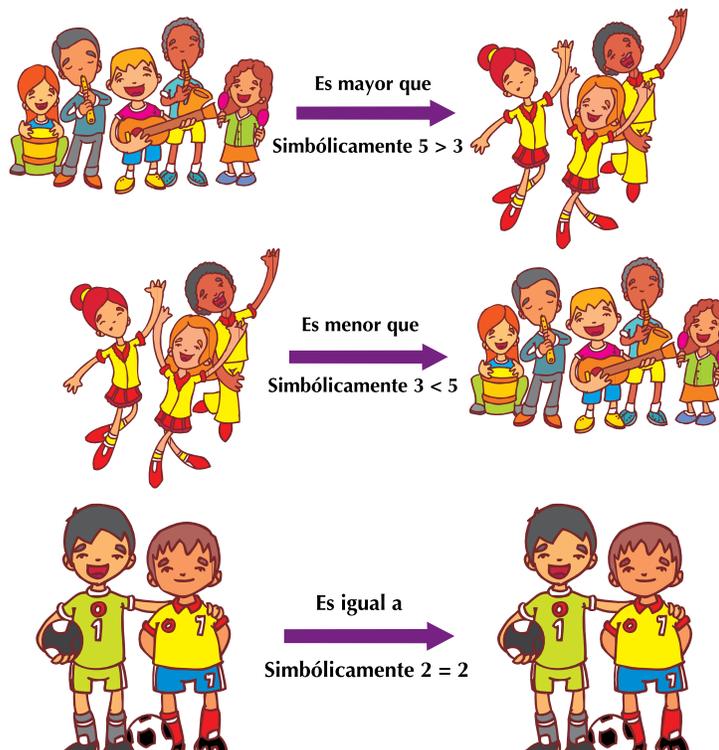
## Relaciones de orden entre números naturales:

Dados dos números del conjunto de los números Naturales ( $\mathbb{N}$ ), existe solamente una de tres posibilidades:

- Que el primero de ellos sea mayor que el segundo.
- Que el segundo sea menor que el primero o
- Que los dos sean iguales.

Por ejemplo ¿Qué relación de orden existe entre 5, 3 y 2?

Veamos:



El antecesor (el anterior de un número) es menor que el sucesor (el posterior o siguiente de un número).

Por ejemplo:  $7 < 8$ , porque 7 es antecesor de 8.

El sucesor es mayor que su antecesor.

Por ejemplo:  $8 > 7$ , porque 8 es sucesor de 7.

### Transitividad

Es el orden que se establece entre tres elementos de un conjunto numérico.

Por ejemplo: Si 3 es menor que 4 y 4 es menor que 5, entonces, 3 es menor que 5.

Se escribe: Si  $3 < 4$  y  $4 < 5$ , entonces  $3 < 5$ .

- El número de dígitos (cifras) de dos o más números dados determina que el mayor es el que tenga más dígitos (cifras).

Por ejemplo: Dados los números 5,348 y 31, ¿Cuál de los dos es mayor?

Veamos:

5,348 tiene cuatro dígitos y 31 tiene solamente dos dígitos, entonces, 5,348 es mayor que 31, es decir:

$5,348 > 31$ , se lee 5,348 es mayor que 31.

- Si tienen igual número de dígitos, se comparan éstos por las unidades de mayor orden (... , decenas de mil, unidades de mil, centenas, decenas o unidades) y es mayor el que tenga en el último orden el dígito mayor).  
Por ejemplo: Dados los números 10,567 y 10,528, ¿Cuál de los dos es mayor?

Veamos:

10,5**6**7 es mayor que 10,5**2**8 ya que comparando las decenas de cada número dado  $6 > 2$  las decenas tienen el dígito 6 mayor que el 2. Luego:  $10,5**6**7 > 10,5**2**8$ .



### Aplicación

Realiza las actividades siguientes, en tu cuaderno y de manera individual. Después compara con tus compañeros y justifica tus respuestas.

1. Clasifica los números de la siguiente lista en: Naturales ( $\mathbb{N}$ ) y no naturales.

- a. 4      b.  $\frac{1}{4}$       c. 12      d. 0.2      e. 100      f.  $\frac{3}{5}$   
g. 12.45      h. 160,001      i. 5      j. 0.3      k. 5,200      l. 2.5

2. Ordena de mayor a menor los siguientes números naturales:

3      7      2      5      0      10      15

3. Escribe el sucesor y el antecesor de cada uno de los siguientes números naturales:

- a. 89      b. 101      c. 499      d. 1,000      e. 32      f. 487

Lee comprensivamente la siguiente información y responde las preguntas 4 y 5.

**El número natural que indica la posición de un elemento en un conjunto, se denomina ordinal.**

Algunos ordinales son:

Número original	1°	2°	3°	10°	12°	20°	35°	48°	50°	100°
Nombre	Primero	segundo	tercero	Décimo	Duodécimo	Vigésimo	Trigésimo quinto	Cuadragésimo octavo	Quincuagésimo	Centésimo

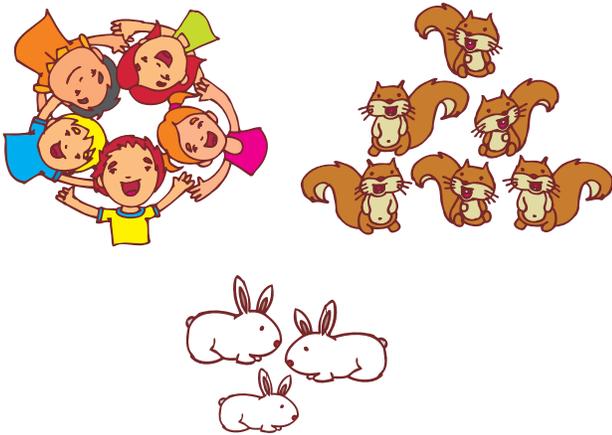
**El número natural que indica el número de elementos de un conjunto se llama cardinal.**

Número cardinal	1	2	7	10	18	60	80	290	993	2011
Nombre	Uno	Dos	Siete	Diez	Dieciocho	Sesenta	Ochenta	Doscientos noventa	Novcientos noventa y tres	Dosmil once

4. Escribe con palabras el nombre, según la posición que ocupen los siguientes números ordinales, así por ejemplo:

- a. 8° ..... Octavo
- b. 11° .....
- c. 13° .....
- d. 25° .....
- e. 30° .....
- f. 59° .....

5. En una casa de campo hay unos niños y unos animales. Escribe el cardinal de cada uno de los siguientes conjuntos.



6. Seis personas tienen en cuenta de ahorros, en el banco de la ciudad. Sus saldos, en pesos, son los siguientes:

5,241	819	74,816
74,716	5,231	823

Ordénalos de menor a mayor.

### Entendemos por...

**Número Ordinal** aquel número Natural que indica la posición de un elemento en un conjunto.

**Número Cardinal** aquel número Natural que indica el número de elementos que tiene un conjunto. **Antecesor** el número natural que está inmediatamente antes que otro número natural. **Sucesor** el número natural que le sigue inmediatamente después a otro número natural. sección es enriquecer el léxico del estudiante.

### Diversión matemática

#### Huevos en la cesta

Una viejecita llevaba huevos al mercado, cuando se le cayó la cesta.



¿Cuántos huevos llevaba? – le preguntaron- .  
Respondió: no lo sé, recuerdo que al contarlos en grupos de 2, 3, 4 y 5, sobran 1, 2, 3 y 4 respectivamente.  
¿Cuántos huevos llevaba la viejecita en la cesta?

### Día a día

#### El cultivo de plátano

En la economía mundial, el plátano es considerado cultivo importante del mundo, después del arroz, el trigo y el maíz.



En Latinoamérica y el Caribe se producen casi 10 millones de toneladas de plátano, de los 12 millones de toneladas que se consumen en el mundo. Es así como se considera que su cultivo es una fuente importante de empleo e ingresos para estas zonas del planeta. El valor nutricional del plátano es muy alto. Es considerado un producto muy digestivo pues favorece la secreción de jugos gástricos. Es una fuente importante de vitaminas B y C (se le equipara con el tomate y la naranja), y de sales minerales como el hierro, fósforo, potasio y calcio.

[http://www.mipunto.com/temas/3er\\_trimestre02/elplatan.html](http://www.mipunto.com/temas/3er_trimestre02/elplatan.html)

# Tema 4. Reconozco los significados de las operaciones con los números naturales en situaciones concretas



## Indagación

Los siguientes son ejemplos de sumas y multiplicaciones utilizados en el siglo XVI.

Descubre cómo funcionaba esta forma de sumar.

4	5	1	6
+	3	7	1
+	9	4	5
		1	2
		1	2
	1	7	
	4		
5	8	3	2

Observa y descubre la multiplicación rusa.

12	x	18	
			72
6		36	144
3		72	216
1		144	

Discute con tus compañeros lo que has descubierto, tanto en la suma como en la multiplicación. Lleguen a una conclusión en cada una y escríbanla en su cuaderno.



## Conceptualización

A continuación encuentras algunas situaciones aditivas (de suma o resta) en donde se desconoce alguna cantidad que debe ser averiguada.

### Situación 1

Trabajando están 3 mujeres y 5 hombres, ¿cuántas personas hay en total?



La estructura es  $a + b = ?$  en donde  $a$  y  $b$  son cantidades conocidas, mientras que la suma  $?$  se desconoce

Para este caso:  $5 + 3 = ?$

### Situación 2

En una granja hay 150 conejos, de los cuales 14 presentan síntomas de enfermedad ¿cuántos conejos hay sanos?

La estructura es  $a + ? = b$ , en donde se desconoce la cantidad de uno de los sumandos,  $(?)$

Para este caso:  $14 + ? = 150$ .

La solución se obtiene a través de la resta:

$? = 150 - 14$ .



**Reconocemos la resta como la operación inversa a la suma.**

Las situaciones 3 a 8 presentan características de cambio en las cantidades de las operaciones de suma y resta.

### Situación 3

Desde el 5° piso de un edificio, baja un ascensor con 7 personas y en el 4° piso se suben 3 personas.

¿Cuántas personas hay ahora en el ascensor?

Matemáticamente diremos  $7 + 3 = ?$ .

Hay una acción (personas que suben al ascensor en el 4° piso) que cambia la cantidad de personas del inicio.



### Situación 4

La tía le regala a Felipe \$15,000 (quince mil pesos).

Los guarda en su bolsillo y ahora tiene \$37,000.

¿Cuánto dinero tenía Felipe en su billetera, antes del regalo de su tía?

Cantidad que tenía + cantidad que le regala la tía = cantidad que tiene ahora.

$$? + 15,000 = 37,000$$

La solución se obtiene haciendo la resta:  $? = 37,000 - 15,000$ .

¿Qué generó el cambio?

### Situación 5

Rosita tiene 8 dulces de chocolate y le regala 3 a su hermano.

¿Cuántos le quedaron?

Como se le disminuyen los dulces a Rosita, entonces, la operación que se hace es una resta.

Simbólicamente  $8 - 3 = ?$

En esta situación, ¿qué genera el cambio en las cantidades?



### Situación 6

Samuel invirtió \$2,000,000 (dos millones de pesos) en un negocio, al cabo de 2 meses hace cuentas y tiene \$1,500,000. ¿Cuánto dinero perdió?

Cantidad invertida – cantidad perdida = cantidad actual.

$$2,000,000 - ? = 1,500,000$$

O lo que es equivalente a decir: Cantidad de dinero invertido – cantidad que tiene ahora = cantidad perdida.

$$2,000,000 - 1,500,000 = ?$$





Las situaciones 8 y 9 que se presentan a continuación, hacen referencia a la estructura multiplicativa, que comprende división, multiplicación y combinaciones entre ellas.

Se relacionan cuatro cantidades: dos de un tipo de medidas y dos de otro tipo.

### Situación 8

Juan tarda 5 minutos en caminar 10 cuadras.

Cuadras caminadas	Minutos empleados
10	5
30	x

¿Cuántos minutos tardará en caminar 30 cuadras?

La x es la cantidad que se busca y corresponde a los minutos empleados en caminar 30 cuadras.

En la relación horizontal entre las cuadras caminadas y los minutos empleados, si se aumenta el número de cuadras, aumentará el número de minutos. Si se disminuye el número de cuadras, disminuirá el número de minutos. Siempre dependiendo del operador.

$$\frac{x \text{ minutos}}{5 \text{ minutos}} = \frac{30 \text{ cuadras}}{10 \text{ cuadras}}$$

Se lee: x minutos es a 5 minutos como 30 cuadras es a 10 cuadras.

$$x \text{ minutos} = \frac{30 \text{ cuadras} \times 5 \text{ minutos}}{10 \text{ cuadras}}$$

$$x \text{ minutos} = \frac{\cancel{30} \text{ cuadras} \times 5 \text{ minutos}}{\cancel{10} \text{ cuadras}}$$

$$x \text{ minutos} = \frac{3 \times 5 \text{ minutos}}{1}$$

$$x \text{ minutos} = 15 \text{ minutos}$$

Luego, Juan gasta 15 minutos caminando 30 cuadras.

### Situación 7

Marcos y Miguel están llenando el álbum de láminas del mundial de fútbol.

Marcos tiene 25 láminas y Miguel tiene 43.

¿Cuántas láminas debe conseguir Marcos para tener el mismo número de láminas que Miguel? Se le suma una cantidad desconocida a 25 para que sea igual a 43.

$$\begin{aligned} ? + 25 &= 43 \\ ? &= 43 - 25 \\ ? &= 18 \end{aligned}$$



### Situación 9

La relación  $\frac{30}{10}$  está marcada por el operador  $\bullet$

minutos es a 30 cuadras como 5 es a 10, se

escribe:  $\frac{x}{5} = \frac{30}{10}$

Despejando la x se tiene:  $x = 5 \bullet \left(\frac{30}{10}\right)$  se lee: x es

igual a 5 multiplicado por 30 y dividido entre 10.

$$x = 5 \bullet (3)$$

$$x = 15$$

Entonces, Juan gasta 15 minutos en caminar 30 cuadras.

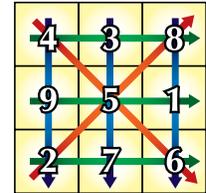


### Aplicación

Los cuadrados mágicos son distribuciones de números en cuadrículas de tal manera que la suma horizontal, vertical y diagonal dé siempre el mismo resultado.

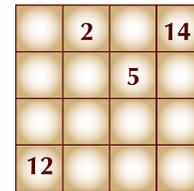
En el cuadrado mágico siguiente, puedes observar que están los números de 1 al 9 y la suma de sus filas, sus columnas y sus diagonales da 15, por lo que se dice que su “constante mágica” es 15.

Cada fila suma 15:  $4 + 3 + 8 = 15$      $9 + 5 + 1 = 15$      $2 + 7 + 6 = 15$   
 Cada columna suma 15:  $4 + 9 + 2 = 15$      $3 + 5 + 7 = 15$      $8 + 1 + 6 = 15$   
 Cada diagonal suma 15:  $2 + 5 + 8 = 15$      $4 + 5 + 6 = 15$



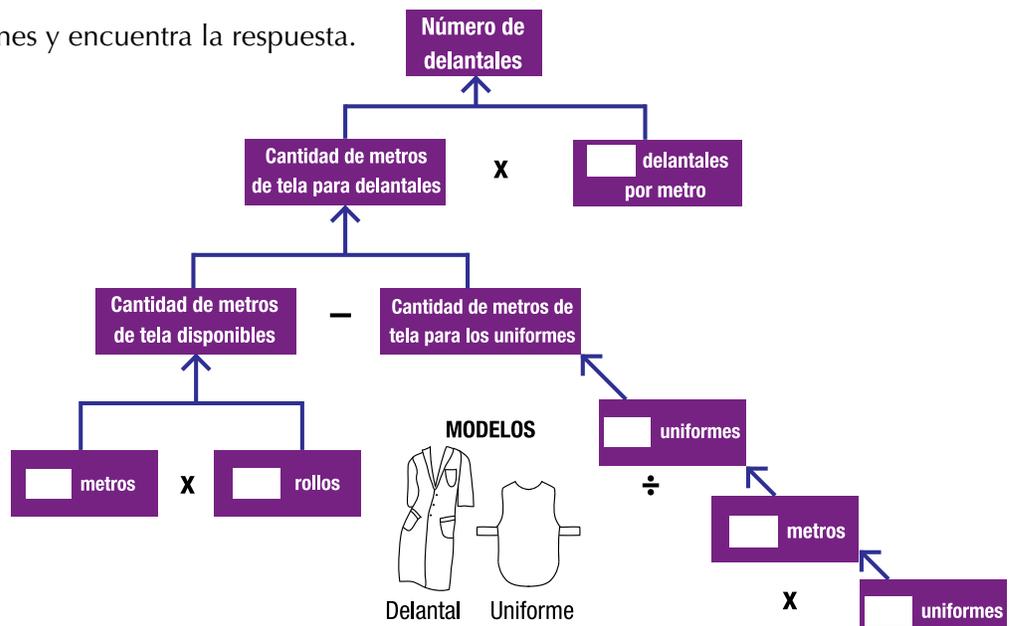
Copia en tu cuaderno las situaciones siguientes y resuélvelas en grupo con tus compañeros.

- Con los números de 1 al 16, completa el cuadrado mágico del lado derecho, con constante mágica 34, es decir, que siempre dé 34 en todas direcciones.

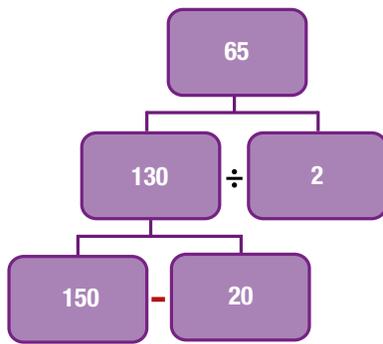
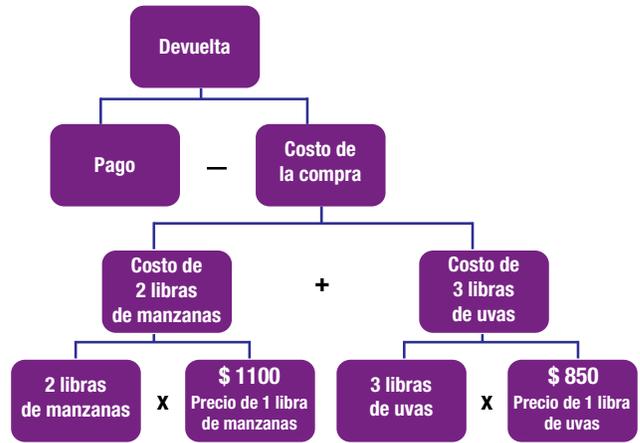


- Una diseñadora de uniformes tiene 3 rollos de tela de 20 metros de largo por 1.50 metros de ancho cada uno. Va a confeccionar 26 uniformes para un grupo de enfermeras. Por cada 3 metros de tela confecciona 2 uniformes. Con el resto de tela va a confeccionar delantales, empleando 1 metro de tela por cada 2 delantales. ¿Cuántos delantales pueden hacerse? La solución se consigue completando el cuadro, empezando de abajo hacia arriba.

Efectúa las operaciones y encuentra la respuesta.

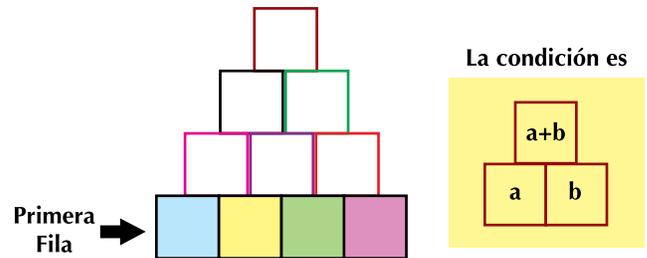


3. José y Carmen van de compras al mercado. José escoge 2 libras de manzana de \$1,100 cada libra y Carmen escoge 3 libras de uvas de \$850 cada libra. José paga las manzanas y las uvas con un billete de \$10,000. Analiza la situación y encuentra cuánto dinero le devolvieron a José.  
El cuadro siguiente, muestra los pasos del análisis y solución de la situación, leyéndolo de abajo hacia arriba.

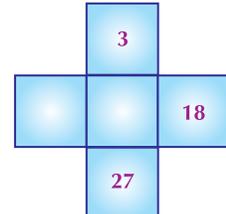
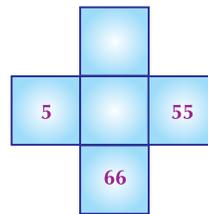
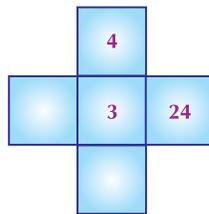
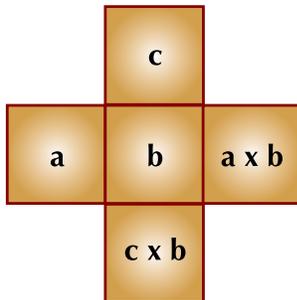


4. En 2 jaulas hay 150 pollos de engorde. En una hay 20 pollos más que en la otra. ¿Cuántos pollos hay en cada jaula? Luego en una jaula hay 65 pollos y en la otra jaula hay 85 pollos. Explícalo y discútelo con tus compañeros.

5. Si en la primera fila hay cuatro números naturales consecutivos (seguidos), completa la pirámide.



6. Analiza la instrucción de la cruz multiplicativa y completa las siguientes:



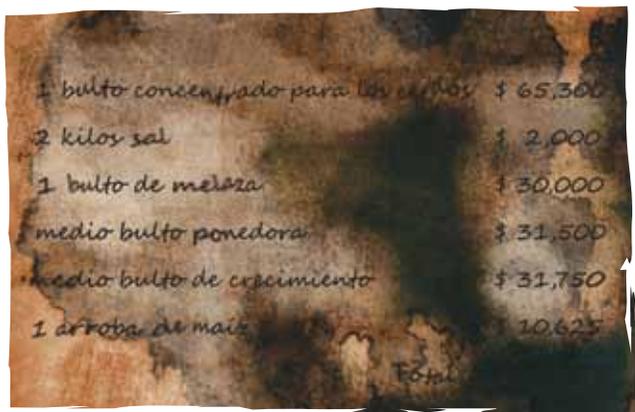
7. En las siguientes sumas, las letras iguales representan dígitos iguales y las letras diferentes representan dígitos diferentes. Halla los sumandos: X, Y y Z.

$$\begin{array}{r} X \\ + Y \\ Y \\ \hline 11 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} X \\ + Y \\ Z \\ \hline 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} Z \\ + X \\ Z \\ \hline 13 \end{array}$$

8. Manuel mide 132 cm, pero si tuviera 47 cm más tendría la estatura de su papá. ¿Cuál es la estatura del papá de Manuel?
9. En una suma el primer sumando es 180, el segundo sumando es el doble del primero más 10 y el tercer sumando es 40. ¿Cuál es el resultado de la suma?
10. Samuel llevó \$ 230,000 a la tienda agropecuaria a comprar alimentos para su granja, pero de regreso a casa la factura se cayó al lodo y algunos datos se perdieron.



Suma los precios que aparecen en la factura y contesta:

- a. ¿Cuál fue el costo de la compra?
- b. ¿Cuánto dinero le quedó?

### Día a día

#### La ganadería colombiana

Es principalmente bovina (vacas y toros) y desarrollan las industrias de leche, carne y cuero. La ganadería es extensiva, es decir que para su levantamiento y manutención, se destinan grandes terrenos.



Los principales departamentos ganaderos son Antioquia, Magdalena, Bolívar, Boyacá, Cauca, Cesar, Córdoba, Cundinamarca, Huila, Meta, Arauca, Casanare y Tolima. Según la Encuesta Nacional Agropecuaria en el año 2004, el sacrificio de ganado vacuno (en 63 municipios que se investigan actualmente a nivel nacional), fue superior al registrado en el año 2003, al pasar de 1'933,620 cabezas a 2'114,504 cabezas. En tu cuaderno, realiza un escrito sobre lo que produce tu región.

Texto: <http://www.dane.gov.co/censo/>

### Diversión matemática

#### Sencillo, Doble y Triple

Se han acomodado los números del 1 al 9 en un cuadrado 3x3 con las siguientes condiciones:

- El número de tres cifras de la segunda fila (384) es el doble que el de la primera (192).
- El de la tercera fila (576) es el triple que el de la primera (192).

¿Puedes encontrar otras disposiciones de números con tres cifras con esas mismas condiciones?

1	9	2
3	8	4
5	7	6

# Tema 5. Comprendo las propiedades matemáticas de las operaciones: suma, resta, multiplicación y división entre números naturales



**Indagación**  
El mayor producto posible con los números impares del 1 al 10.

Un estudiante de un curso de Matemáticas tiene cinco tarjetas y en cada una hay un número impar diferente, entre 1 y 10.

Con las 5 tarjetas, arma tres números, cuya multiplicación es la más grande de 4 intentos que realiza.

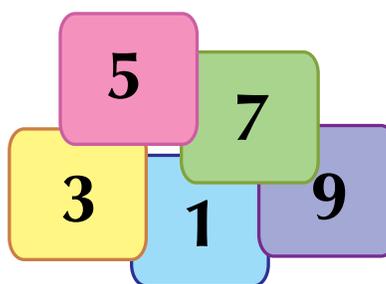
Como si tú fueras este estudiante, copia el cuadro siguiente en tu cuaderno, resuelve el ejercicio y compara tus resultados con los de 3 ó 4 compañeros y felicita al que haya obtenido el resultado mayor.

Primer intento  x  x  =

Segundo intento  x  x  =

Tercer intento  x  x  =

Cuarto intento  x  x  =



**Conceptualización**

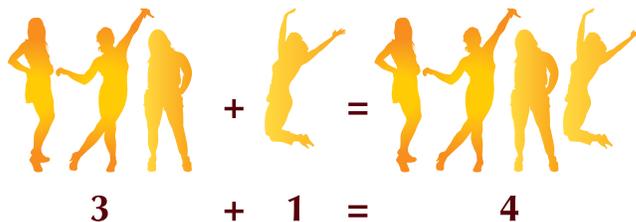
Las operaciones de suma y de multiplicación cumplen algunas propiedades.

## Propiedad clausurativa en el sistema de los números naturales (N)

La suma de dos o más números naturales es otro número natural.

Ejemplo: 3 y 1 son dos números naturales,  
 $3 + 1 = 4$ , 4 también es un número natural.

3 es un número natural, 1 es un número natural  
y 4 también es un número natural.



Luego, **la operación suma del sistema de los números naturales, es clausurativa.**

La propiedad clausurativa, no se cumple para la resta de números naturales.

Ejemplo

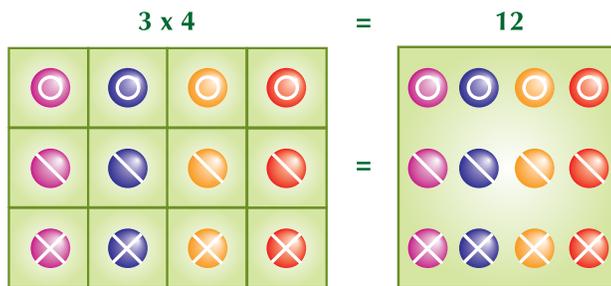
7- 10 no da como resultado un número natural, porque no es posible restar a un número natural menor otro número natural mayor.

La operación resta del sistema de números naturales, no es clausurativa.

El producto de dos números naturales es otro número natural.

Ejemplo

2 y 4 son dos números naturales, el producto  $3 \times 4 = 12$  es número natural.



**La operación multiplicación del sistema de números naturales, sí cumple con la propiedad clausurativa.**

El cociente de la división de dos números naturales no siempre es un número natural.

Ejemplo:

$7 \div 2$  no es un número natural porque la división no es exacta.

Porque tiene residuo 1.

La división de un número Natural por cero no es posible.

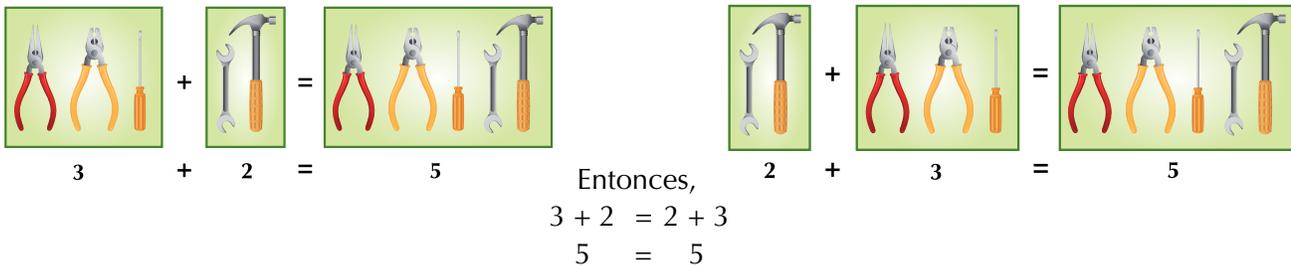
$$\begin{array}{r} 7 \\ 1 \overline{) 2} \\ \underline{2} \phantom{0} \\ 0 \phantom{0} \end{array}$$

**La operación división del sistema de números naturales, no cumple con la propiedad clausurativa.**

### Propiedad conmutativa en el sistema de los números naturales (N)

El orden en que se escriban los sumandos no cambia el resultado de una suma.

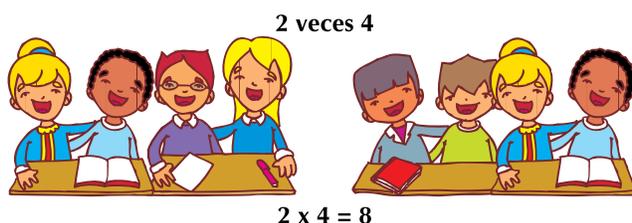
Ejemplo:



**La suma y la multiplicación del sistema de números naturales, es conmutativa.**

El orden en que se escriban los factores no altera el resultado de la multiplicación.

Ejemplo:



Entonces,  $2 \times 4 = 4 \times 2$   
 $8 = 8$

**Las operaciones resta y división en el sistema de números naturales, no cumplen la propiedad conmutativa.**

En tu cuaderno, escribe ejemplos para la resta y la división que muestren que la propiedad conmutativa no se cumple.

### Propiedad asociativa en el sistema de los números naturales (N)

Las operaciones suma y multiplicación del sistema de los números Naturales cumplen con la propiedad asociativa.

Dos o más números se pueden adicionar formando grupos diferentes y la suma no cambia.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} \$20,000 &+ (\$50,000 + \$10,000) = \\ \$20,000 &+ \$60,000 = \\ & \$80,000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\$20,000 + \$10,000) &+ \$50,000 = \\ \$30,000 &+ \$50,000 = \\ & \$80,000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\$20,000 + \$50,000) &+ \$10,000 = \\ \$70,000 &+ \$10,000 = \\ & \$80,000 \end{aligned}$$

**La operación suma en el sistema de números naturales, es asociativa.**

El producto de dos o más números Naturales agrupados de diferente forma no cambia el resultado.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} (5 \times 6) \times 2 &= 5 \times (6 \times 2) \\ 30 \times 2 &= 5 \times 12 \\ 60 &= 60 \end{aligned}$$

**La operación multiplicación en el sistema de los números naturales, es asociativa.**

En tu cuaderno, estudia este cuadro, muestra con ejemplos que las operaciones resta y división del sistema de números Naturales no cumplen con la propiedad asociativa.

**El módulo de la suma en el sistema de números naturales es cero.**

**La suma de un número Natural con cero, da como resultado el mismo número natural.**

### Propiedad modulativa en el sistema de los números Naturales (N)

$$\begin{aligned} 18 + 0 &= 18 \\ 35 + 0 &= 35 \\ 1 + 0 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11 \times 1 &= 11 \\ 24 \times 1 &= 24 \\ 1 \times 1 &= 1 \end{aligned}$$

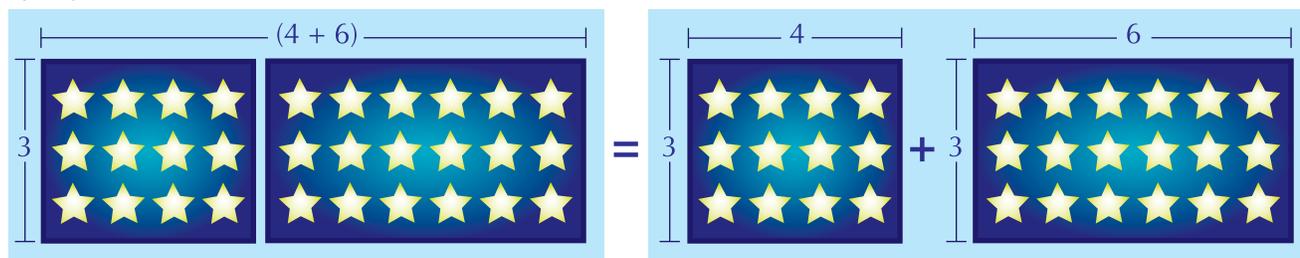
**El número 1 es el neutro para la operación multiplicación en el sistema de números naturales.**

**Todo número Natural sumado con cero da como resultado el mismo número natural.**

### Propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma en el sistema de los números naturales (N)

La propiedad distributiva relaciona la operación multiplicación y la operación suma en el sistema de los números naturales.

Ejemplo



$$\begin{aligned} 3 \times (4 + 6) &= 3 \times 4 + 3 \times 6 \\ 3 \times 10 &= 12 + 18 \\ 30 &= 30 \end{aligned}$$

La propiedad distributiva también relaciona la operación multiplicación con la operación resta en el sistema de los números naturales.

Escribe en tu cuaderno un ejemplo de la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la resta.

La tabla siguiente resume en una forma general las propiedades para la suma y multiplicación en el sistema de los números naturales.

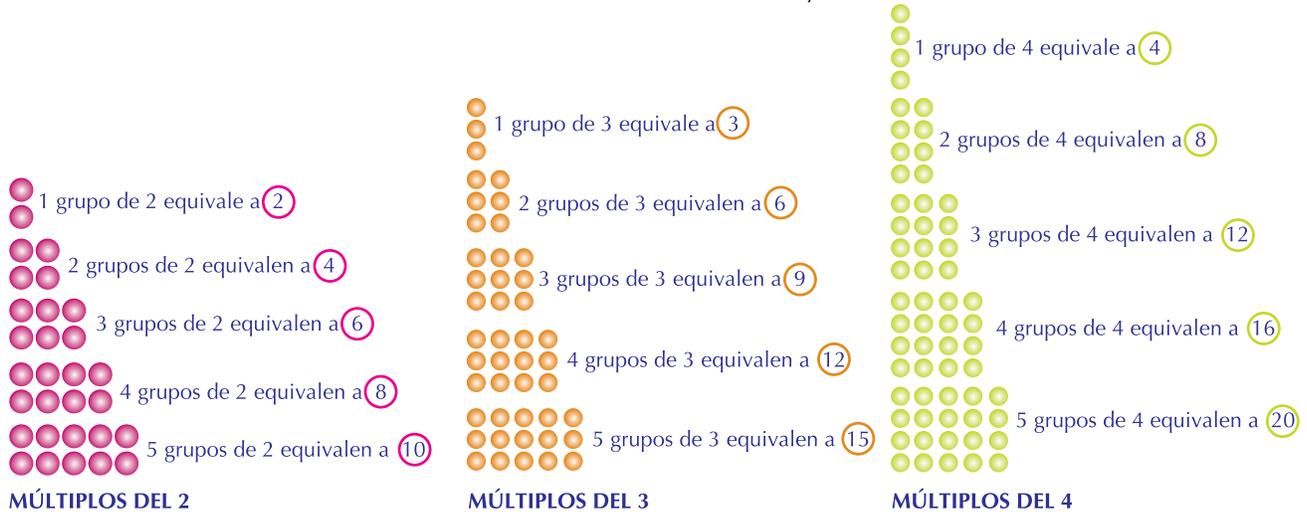
Propiedades del sistema de los números naturales		
Dados los números naturales a, b y c, se cumple:		
Propiedad	Suma	Multiplicación
Clausurativa		
Asociativa		
Modulativa		
Invertiva		
Conmutativa		

### Múltiplo de un número natural

- Los múltiplos del número Natural 2 son: 2, 4, 6, 8, 10, ... y se forman agrupando el número 2, una vez, dos veces, tres veces, ...
- Los múltiplos del número Natural 3 son: 3, 6, 9, 12, 15, ..., y se forman agrupando el número 3, una vez, dos veces, tres veces, ...

- Los múltiplos del número Natural 4 son: 4, 8, 12, 16, 20, ... y se forman agrupando el número 4, una vez, dos veces, tres veces, ...

La gráfica siguiente muestra los grupos que se han formado para los múltiplos de los números Naturales 2, 3 y 4.



**El múltiplo de un número natural dado, es el número que se obtiene de multiplicar el número dado por cualquier otro número natural.**

Calculemos los seis primeros múltiplos de los números Naturales: 5, 6 y 7.

En la multiplicación  $5 \times 4 = 20$ , el 5 y el 4 son los factores y 20 es un múltiplo de 5.

En la multiplicación  $6 \times 3 = 18$ , el 6 y el 3 son los factores y 18 es un múltiplo de 6.

Múltiplos		
Del 5	Del 6	Del 7
$5 \times 1 = 5$	$6 \times 1 = 6$	$7 \times 1 = 7$
$5 \times 2 = 10$	$6 \times 2 = 12$	$7 \times 2 = 14$
$5 \times 3 = 15$	$6 \times 3 = 18$	$7 \times 3 = 21$
$5 \times 4 = 20$	$6 \times 4 = 24$	$7 \times 4 = 28$
$5 \times 5 = 25$	$6 \times 5 = 30$	$7 \times 5 = 35$
$5 \times 6 = 30$	$6 \times 6 = 36$	$7 \times 6 = 42$

### Divisor de un número natural

El divisor (o submúltiplo) de un número natural es aquel que divide exactamente a ese número.

Los divisores de un número se utilizan cuando es necesario hacer una distribución en partes iguales de una colocación de objetos o personas.

Por ejemplo:

Al organizar, una formación con 12 niños y niñas de un salón en grupos de 3, se obtuvo 4 y no quedaron niños por fuera de la formación, 12 son la totalidad de niños y niñas que se organizan (dividendo); 3 son los grupos que se distribuyen en partes iguales (divisor); 4 son los niños y niñas que conforman cada grupo de 3 (cociente); 0 son los niños o niñas que quedan por fuera de la formación (residuo).

El 3 es divisor de 12, porque  $12 \div 3 = 4$  y el residuo es 0.

Para calcular todos los divisores o submúltiplos de 12 se lo divide entre él mismo y entre todos los números naturales menores que él, observando en qué casos el residuo es 0.



Observa el cuadro siguiente en donde puedes ver las divisiones de 12 entre números menores que él, e iguales a él.

	12 ÷ entre												
Números menores o iguales que 12 naturales	→	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Cociente	→	12	6	4	3	2	2	1	1	1	1	1	1
Residuo	→	0	0	0	0	2	0	5	4	3	2	1	0
Los divisores o submúltiplos de 12	→	1	2	3	4		6						12

### Criterios de divisibilidad.

En ocasiones, es necesario determinar rápidamente si un número se puede dividir exactamente entre otro sin realizar la división.

Esto se puede lograr si se conocen las propiedades o criterios de divisibilidad que se presentan a continuación.

#### Divisibilidad entre 2

Un número es divisible entre 2 si la cifra de las unidades es par o termina en cero, esto es: 2, 4, 6, 8, ...  
Ejemplos: Son divisibles entre 2 los números: **4520, 628, 724.**

#### Divisibilidad entre 3

Un número es divisible entre 3 si la suma de sus cifras es múltiplo de 3.  
Ejemplo: 423 sí es divisible entre 3, porque  $4 + 2 + 3 = 9$  y 9 es múltiplo de 3.

#### Divisibilidad entre 5

Un número es divisible entre 5 si la cifra de las unidades es cero o cinco.  
Ejemplos: Son divisibles entre 5 los números: 425, 700, 675, 120.

#### Divisibilidad entre 7

Para saber si un número es divisible entre 7, duplicamos las unidades y restamos dicho resultado del número formado por las cifras restantes. Este paso

se repite hasta que la diferencia esté formada por una o dos cifras; si éstas últimas son 0 o múltiplos de 7, el número propuesto es divisible entre 7.

Ejemplos:

a. Verificar si 84 es divisible entre 7.

Solución:

Recordemos que 84 tiene 8 decenas y 4 unidades. Se duplican las unidades o sea:  $4 \times 2 = 8$ ; se resta el resultado a las cifras anteriores a las unidades:

$$8 - 8 = 0. \text{ Como el resultado es } 0, \text{ entonces, } 84 \text{ es divisible entre } 7.$$

b. Verificar si 156 es divisible entre 7.

Solución:

Recordemos que 156 tiene 1 centena, 5 decenas y 6 unidades.

Se duplican las unidades o sea:  $6 \times 2 = 12$ ; se resta el resultado a las cifras anteriores a las unidades:

$$15 - 12 = 3. \text{ Como el resultado es } 3, \text{ entonces, } 156 \text{ no es divisible entre } 7.$$

Cuando el doble es mayor que los demás dígitos, de todos modos se calcula la diferencia y si el resultado es múltiplo de 7, el número será divisible entre 7.

## Números primos y números compuestos

Los números Naturales son primos o compuestos y los criterios de divisibilidad son las herramientas para determinar si un número Natural es primo o compuesto.

Los números primos tienen únicamente dos divisores: el uno, que es divisor de todo número y el mismo número.

Los números compuestos tienen más de dos divisores.

La tabla siguiente muestra los divisores de los números 2 a 10 y los clasifica como primos o compuestos, es decir no primos.

Número natural	Divisores	Primo	Compuesto (no primo)
2	2	✓	
3	3	✓	
4	2 y 4		x
5	5	✓	
6	2,3 y 6		x
7	7	✓	
8	2,4 y 8		x
9	2,3 y 9		x
10	2,5 y 10		x

**Los números primos menores que 100 son:**

**2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 71, 73, 79, 83, 89, 97.**

**El único número par que es primo es el 2.**

Un buen ejercicio para obtener los números primos entre 1 y 100, es escribirlos todos y luego ir contando desde 1, primero de 2 en dos, se encierra el primero (2) y se tachan los demás (4, 6, 8, ...), después de 3 en 3, se encierra el primero (3) y se tachan los demás (6, 9, 12, ...) y así sucesivamente de 5 en 5, de 7 en 7 y de 11 en 11. Se encierran los números que han quedado sin tachar y los que quedaron encerrados son los primos que hay entre 1 y 100. Comprueba este ejercicio, en tu cuaderno.

Los números compuestos (no primos) menores que 50 son:

4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 32, 33, 34, 35, 36, 38, 39, 40, 41, 42, 44, 45, 46, 48 y 49.

Se llaman compuestos porque están expresados como el producto de dos o más números primos.

Ejemplos:

a.  $9 = 3 \times 3$

b.  $12 = 2 \times 2 \times 3$

c.  $42 = 2 \times 3 \times 7$

## Descomposición de un número en sus factores primos.

Una manera para descomponer un número en sus factores primos es realizar divisiones sucesivas, cuyo divisor es un número primo.

Se divide sucesivamente entre números primos divisores del número dado.

Ejemplos:

a. Descomponer a 64 en sus factores primos.

Solución:

Como 64 es par, entonces, es divisible por 2. Así:  $64 \div 2 = 32$  y como sigue resultando número par, se seguirá dividiendo entre 2.

$$32 \div 2 = 16$$

$$16 \div 2 = 8$$

$$8 \div 2 = 4$$

$$4 \div 2 = 2$$

$$2 \div 2 = 1$$

$$64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

Como 2 se repite 6 veces, entonces escribimos:

$$64 = 2^6$$

Simplificadamente se escribe así:

64	2
32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

$$2^6 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$$

b. Descomponer a 174 en sus factores primos.

Solución:

Como 174 termina en cifra par, es divisible por 2, entonces  $174 \div 2 = 87$ .

87 es divisible por 3, porque la suma de sus cifras  $8 + 7 = 15$  y 15 es divisible por 3, entonces,  $87 \div 3 = 29$

Como 29 es primo, entonces:  $29 \div 29 = 1$

Simplificadamente:

174	2
87	3
29	29
1	

Por lo tanto:  $2 \times 3 \times 29 = 174$



## Aplicación

Copia y resuelve en tu cuaderno, los casos siguientes y después compara tus respuestas con varios compañeros.

Completa las tablas:

1.

Número	Múltiplos			
4				
7				
9				
17				
25				

2.

Número	Divisores
420	
225	
140	
353	
76	

3. En una bolsa hay menos de 30 semillas. Podemos hacer grupos de 4 semillas sin que sobre ninguna. Si hacemos grupos de 5 semillas tampoco sobra ninguna. ¿Cuántas semillas hay en la bolsa?
4. Tengo en la huerta hierbas aromáticas y plantas ornamentales. Las hierbas aromáticas las riego cada 2 días y la ornamentales cada 5. Si hoy he regado las dos, ¿cuántos días pasarán hasta que tenga que volver a regar las dos a la vez? (sugerencia: 2 y 5 son divisores de este número).
5. Miguel quiere cerrar unos bultos de naranjas y para ello tiene dos madejas de piola (cabuya, cáñamo, etc.), una de 10 metros y otra de 15 metros. Parte las dos en trozos iguales de manera que no le sobre nada. ¿Cuál es la longitud máxima de cada trozo que le queda a Miguel? (sugerencia: Es divisor común a las dos medidas).

6. Se desea hacer una formación de 24 hombres y 32 mujeres, de forma que haya el mismo número de hombres y mujeres en cada fila. ¿Cuál debe ser el número máximo de personas que conformen cada fila?, ¿cuántas filas se utilizarán?

Completa las tablas escribiendo los factores primos a cada uno de los números dados y después escribe los factores que se repiten y que se llaman factores comunes.

7.

Números	Factores primos
30	
90	
120	

Factores primos comunes a 20, 30 y 90 (que se repiten)

8.

Números	Factores primos
26	
35	
140	

Factores primos comunes a 26, 35 y 140 (que se repiten)

9. Daniel, el hijo de Alfredo, ha estado recolectando café y le pagaron a \$450 cada kilo recogido. Daniel alcanzó a recoger 300 kilos. ¿Cuánto dinero recibió Daniel?



### Entendemos por...

**Divisibilidad** aquella propiedad que tienen los números de dejarse dividir por otro número de tal modo que su división es exacta (residuo cero).

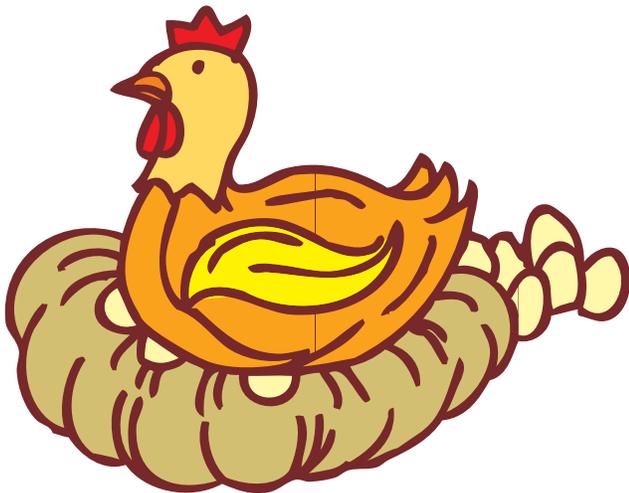
### Diversión matemática

#### Dominó mágico

Con 18 fichas de dominó es posible construir cuadrados mágicos de 6 x 6 en los que la suma de los tantos de cualquiera de sus filas es siempre la misma. La menor suma que se puede conseguir es 13, mientras que la suma mayor es 23.

Fuente: Matemáticas Recreativas, de Yakov Perelman.

•••••	••	•	••••	•••••	••
••••	•••	••	•••	•••••	••••
•••	••	•••••	••••	••••	•••••
••	•••	••••	•••	•••••	••••
••	••••	•••••	•••••	••••	•••••
•••••	•••	••	••	••••	••••



### Día a día

#### ¡ A criar gallinas!

La población mundial crece. En 20 años, en la Tierra seremos unos 8 billones de habitantes. En todo el mundo se consumen huevos de gallinas.

El huevo es un alimento rico y completo. Hoy, el consumo mundial de huevo es de 68,000 millones de kilos y para 2,030 puede subir a 88,000 millones de kilos.

Actualmente, cada persona debe consumir 1 o 2 huevos al día.

Una gallina madura produce de 300 a 320 huevos al año. Estas cifras son muy prometedoras para los avicultores modernos, pues la producción de gallinas es un negocio que puede dar muy buenos rendimientos.

<http://www.engormix.com/MA-avicultura/nutricion/articulos/huevos-y-colesterol-t3266/141-p0.htm>

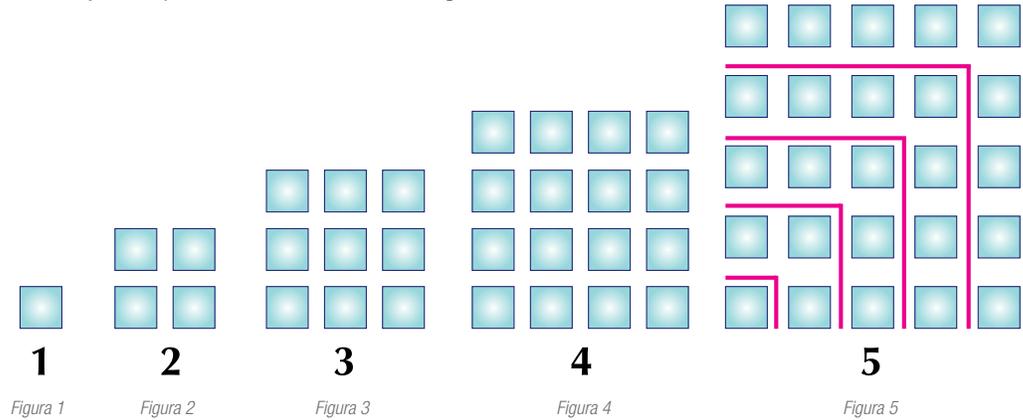
# Tema 6. Propiedades matemáticas de las operaciones: potenciación y radicación entre números naturales



## Indagación

Dibuja en tu cuaderno la siguiente secuencia y escribe el número de cuadrillos que compone a cada figura.

¿Qué relación hay entre el número de cuadrillos que compone a cada figura y el número de cuadrillos que hay en la base de cada figura?



Observa el número de cuadrillos que hay en cada ángulo (en rojo) de la figura 5 y la secuencia de números que resulta. Súmalos y compara los resultados con tus compañeros.

Para saber cuántas cerillas hay en total, se multiplica:  
 20 paquetes X 20 cajas pequeñas X 20 cerillas = 8,000.

Que expresada como potencia es:  
 $20^3 = 8,000$  porque 3 grupos de 20 equivalen a  $20 \times 20 \times 20 = 8,000$ .

En la expresión  $20^3 = 8,000$  distinguimos: la base 20, el exponente 3 y la potencia 8,000.



## Conceptualización

La potenciación es la operación que permite calcular el producto de factores iguales en forma abreviada, por ejemplo, en la situación de un vendedor que compra una caja grande que contiene 20 paquetes, cada uno de los cuales contiene 20 cajas pequeñas que a su vez contienen 20 cerillas cada una para revender en su tienda.

$$\begin{array}{c}
 \text{Exponente} \\
 \downarrow \\
 \boxed{3} \\
 \downarrow \\
 \mathbf{20} = \mathbf{8,000} \quad \text{Potencia} \\
 \downarrow \\
 \text{Base}
 \end{array}$$

En total hay 8,000 cerillas.

## Propiedades de la potenciación del sistema de los números naturales

- Potencia de un producto.

Ejemplo:

$$(3 \times 2)^2 = (3 \times 2) \times (3 \times 2) = 6 \times 6 = 36$$

$$3^2 \times 2^2 = 3 \times 3 \times 2 \times 2 = 9 \times 4 = 36$$

Luego  $(3 \times 2)^2 = 3^2 \times 2^2$  o también  $3^2 \times 2^2 = (3 \times 2)^2$

**La potencia de un producto es igual al producto de las potencias que se obtienen al elevar cada factor al exponente dado.**

- Producto de potencias de igual base.

Ejemplo:

$$3^2 \times 3^1 =$$

$$3^2 \times 3^1 = 3 \times 3 \times 3 = 27$$

$$(3)^{2+1} = 3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27,$$

Entonces:  $3^2 \times 3^1 = (3)^{2+1}$  o también  $(3)^{2+1} = 3^2 \times 3^1$

**El producto de potencias de igual base se calcula dejando la misma base y sumando los exponentes.**

- División de potencias con igual base.

Ejemplo:

$$\frac{4^5}{4^3} =$$

$$\frac{4^5}{4^3} = \frac{4 \times 4 \times \cancel{4} \times \cancel{4} \times \cancel{4}}{\cancel{4} \times \cancel{4} \times \cancel{4}} = 4 \times 4 = 16$$

**Para dividir dos potencias con la misma base se escribe la misma base y se restan los exponentes.**

- Potencia de una potencia.

Ejemplo:

$$(2^2)^3 = (2^2)^3 = (2 \times 2)^3 = 4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$$

$$(2)^{2 \times 3} = 2^6 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$$

Luego,  $(2^2)^3 = (2)^{2 \times 3}$  o  $(2)^{2 \times 3} = (2^2)^3$

**Para hallar la potencia de una potencia, se escribe la misma base y se multiplican los exponentes.**

- Todo número natural elevado al exponente 1 es igual al mismo número natural.

Ejemplo:  $4^1 = 4$

- Todo número Natural elevado al exponente 0 es igual a 1.

Ejemplo:

$$5^0 = 1$$

$$5^0 = (5)^{3-3} \text{ el cero es equivalente a } 3-3 \text{ o } 2-2$$

$$5^0 = \frac{5^3}{5^3} \text{ División de potencias de la misma base.}$$

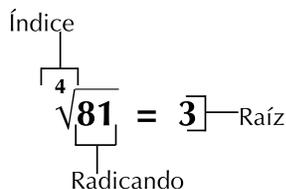
$$5^0 = 1 \text{ el cociente de un número por él mismo es igual a 1.}$$

**La radicación es una operación inversa a la potenciación, se aplica cuando conociendo el exponente y la potencia, se desea conocer la base.**

Por ejemplo:

$$\sqrt[4]{81} = 3 \text{ porque } 3^4 = 81, \text{ es decir, } 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$$

El gráfico siguiente muestra los términos de la radicación:



Si la raíz tiene índice 2 se lee: "raíz cuadrada". Por lo general el índice 2 de la raíz cuadrada no se escribe.

$$\sqrt{16} = 4 \text{ (la raíz cuadrada de 16 es igual a 4).}$$

Sí la raíz tiene índice 3 se lee: "raíz cubica".

Si la raíz tiene índice 4 se lee: "raíz cuarta", etc.

## Propiedades de la radicación en el sistema de los números Naturales

- La raíz de un producto.

Ejemplo:

$$\sqrt{25 \times 64} = \sqrt{25} \times \sqrt{64} = 5 \times 8 = 40$$

**La raíz del producto de dos o más números naturales es igual al producto de las raíces de los números.**

- La raíz de un cociente.

Ejemplo:  $\sqrt[3]{\frac{64}{8}} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{4}{2} = 2 \quad (8 \neq 0)$

**La raíz de un cociente de números naturales con denominador diferente de cero es igual al cociente de las raíces.**

- Si a una potencia se le extrae la raíz con índice igual al exponente de la potencia, el resultado es el mismo número.

Ejemplo:  $\sqrt[3]{5^3} = \sqrt[3]{125} = 5$ , luego  $\sqrt[3]{5^3} = 5$



### Aplicación

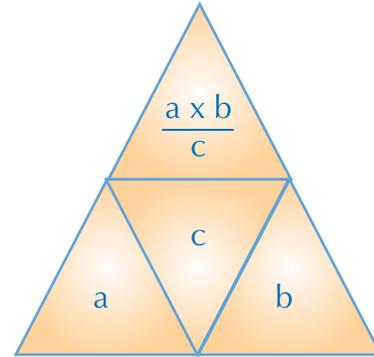
Copia en tu cuaderno las siguientes actividades, resuelve y compara tus resultados con tus compañeros.

1. Asocia con una línea cada potencia con su resultado correspondiente:

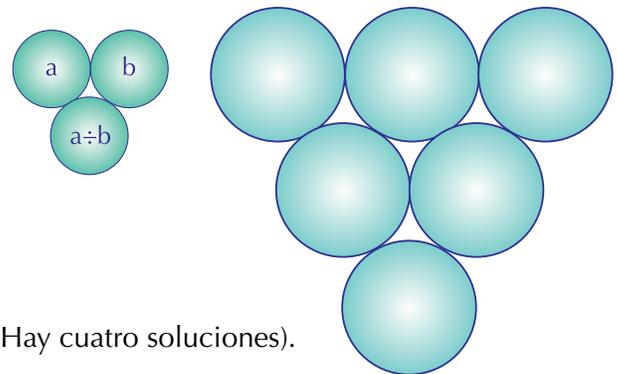
Potencia	Resultado
$7^4$	8
$6^2$	49
$4^4$	2,401
$1^5$	64
$7^2$	4
$2^2$	1
$4^3$	36
$2^3$	256

2. Ubica las potencias  $2$ ,  $2^2$ ,  $2^3$  y  $2^4$  en el lugar de  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $\frac{a \times b}{c}$  de forma que el producto de

potencias en el lugar de  $a$  y  $b$ , dividido por la potencia del lugar  $c$ , sea el resultado del triángulo superior.

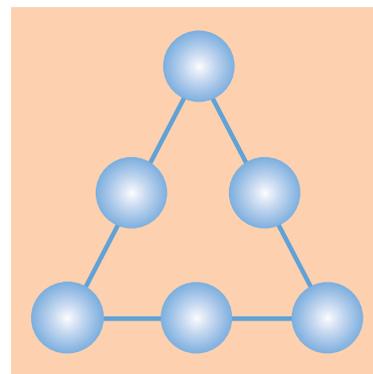


3. Ubica los números  $2, 4, 8, 16, 32$  y  $64$ , en el diagrama de círculos según la regla:



(Hay cuatro soluciones).

4. Ubica los números  $2, 1, 2, 4, 8$  y  $16$  de forma que el resultado de multiplicar y dividir los tres números en cada lado del triángulo sea  $64$ . También se puede realizar, para que los resultados sean  $8, 16$  o  $32$ .



5. Completa la tabla siguiente:

	Base	Indice	Potencia
$5^4$			
$3^2$			
$2^1$			
$4^3$			
$6^0$			

Resuelve:

6.  $4^3 \times 4^2$
7.  $3^3 \times 3^4$
8.  $(2^8)^1$
9.  $1^5 \times 1^7$
10.  $5^5 \times 5^5$

### Entendemos por...

**Divisor** el número que divide a otro exactamente.

Por ejemplo 5 divide exactamente a 100, luego 5 es un factor o divisor propio de 100.

### Diversión matemática

Organiza siete fósforos para que parezcan mil y cinco fósforos para que parezcan diez.

Harry ha dado a su hermana siete fósforos, desafiándola a que los disponga de manera que parezcan mil. Ella, a su vez, le ha dado a Harry cinco fósforos, retándolo a que los disponga de tal manera que parezcan diez.

Ayúdalos a resolver la situación.



### Día a día

#### La ciencia que estudia el Universo

La Astronomía es la ciencia que estudia el Universo o cosmos compuesto de astros, en grandes conjuntos de manchas luminosas llamadas galaxias, las que tienen millones de estrellas.

Las dimensiones de las galaxias son tan grandes, que son cifras prácticamente imposibles de imaginar y se miden en una unidad llamada año luz, que equivale más o menos a 9,5 billones de kilómetros. Las dimensiones de muchas galaxias son de alrededor de centenares de miles de años luz. Generalmente se expresan estas enormes cifras en potencias de 10 y se llama notación científica.

Texto: [http://www.proyectosalohogar.com/Enciclopedia/Universo\\_y\\_Sistema/indice.htm](http://www.proyectosalohogar.com/Enciclopedia/Universo_y_Sistema/indice.htm)



## Este capítulo fue clave porque

- Aprendí acerca de los orígenes de los números, las diversas culturas de la humanidad y cómo el hombre ha investigado, inventado e interpretado símbolos y codificaciones útiles para el progreso.
- Me dí cuenta de la gran importancia que tienen los números en la vida cotidiana, en el desempeño de los trabajos y en la vida escolar.
- He podido reflexionar sobre la importancia de los números naturales en todo nuestro entorno, saber que existen situaciones como: obtener las cuentas al realizar una compra, cuánto tengo, cuánto gasto y cuánto me queda, son conocimientos muy importantes en el diario vivir.
- Poder contar las cosas, saber que hay millones de estrellas, que no somos el único planeta del universo sino que hay millones más, es algo maravilloso en la relación de los números con la astronomía. Igual ocurre con otras ciencias como la Biología en donde los números son necesarios.
- He conocido a través de la historia diferentes sistemas de numeración con sus símbolos, representaciones, operaciones, características, propiedades y relaciones.

## Conectémonos con la Geografía Universal



### República Popular China

China es el país más poblado de la Tierra, tiene aproximadamente 1,300,000,000 (mil trescientos millones) de habitantes y es uno de los más extensos de La tierra, con casi 10 millones de km<sup>2</sup>, es el 4° país más extenso del mundo.

China cuenta con 22,800 kilómetros de frontera terrestre, compartida con los países de: Corea, Mongolia, Rusia, Kazajistán, Kirguizistán, Tayikistán, Afganistán, Pakistán, India, Nepal, Bután, Myanmar, Laos y Vietnam.

Para pensar: Si China es el 4° país más extenso del mundo, uno puede preguntarse, ¿cuáles serán los tres primeros de mayor extensión o superficie? Consúltalo.



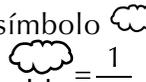
# Número Racional positivo

Los números Racionales son una gran ayuda para muchas actividades de las personas, como por ejemplo, en las recetas de cocina, la venta en una plaza de mercado.

Los números Racionales son conocidos como fraccionarios, permiten comprender muchas situaciones ya sean del diario vivir, del mundo que le rodea o de las aplicaciones a las diferentes disciplinas, por ejemplo, en ciencias sociales, cuando se realizan censos se distribuyen categorías como: hombres mujeres, niños.

Se han encontrado pruebas de culturas como los que babilónicos, griegos y romanos quienes utilizaron las fracciones unitarias ( $\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \dots$ ).

Los egipcios solo concebían algunas fracciones, que hoy escribimos como  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ , etc.,

representándolas con el símbolo  que significa "parte", por ejemplo,

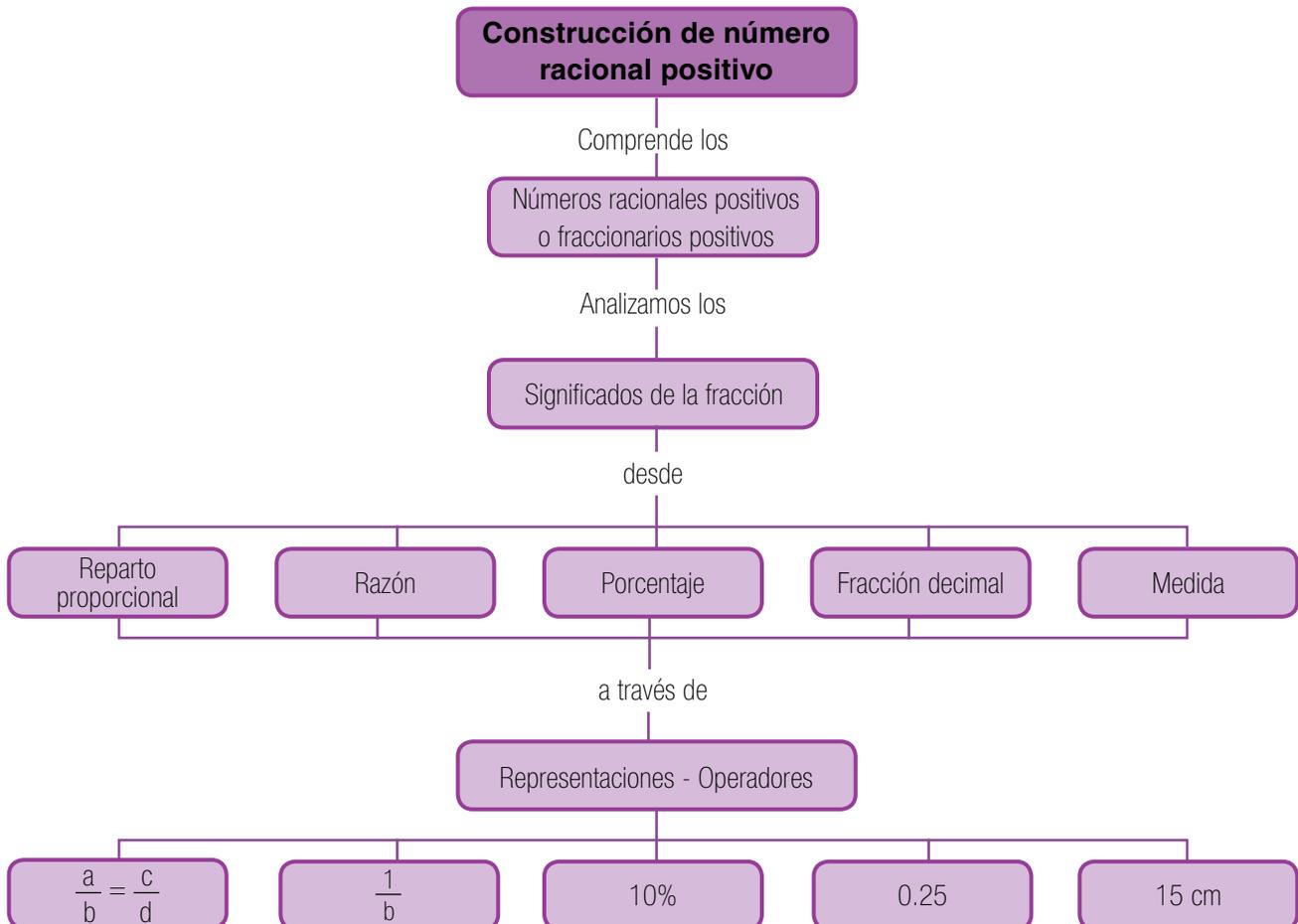
$$\begin{aligned} \text{cloud} &= \frac{1}{2} \\ \text{cloud} &= \frac{1}{20} \end{aligned}$$

Varios siglos después, el famoso matemático Leonardo de Pisa, en el siglo XIII inventó la raya horizontal para separar el numerador del denominador de una fracción, tal como la usamos hoy.

Comúnmente utilizamos los números Racionales en situaciones ligadas a las nociones de partición, división, acortamientos, relaciones parte todo, medidas, razones, proporciones.

Por ejemplo:

Cuando se desea partir un alambre de 20 metros de largo en 4 partes iguales ¿Cuál es el tamaño de cada parte?



# Tema 1.

## Reparto proporcional



### Indagación

Carlos desea cultivar un terreno rectangular como el de la ilustración 1, así: La mitad con hortalizas, la tercera parte con plantas medicinales y el resto con plantas aromáticas.

En tu cuaderno dibuja el terreno y señala, con tres colores diferentes, los cultivos deseados por Carlos.

¿Qué parte del terreno tendrá cultivo de plantas aromáticas?

Compara tu trabajo con el de tus compañeros.

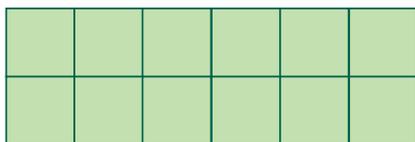


Ilustración 1



### Conceptualización

La ilustración 2 muestra:

En el paso 1, una unidad representada por la figura de color amarillo, 1 de 1.

En el paso 2, observas que la misma unidad ha sido dividida en 4 partes iguales, de las cuales se ha tomado 1 (color verde), 1 de 4.

La parte de la unidad pintada de verde, es un cuarto ( $\frac{1}{4}$ ) de la unidad.

En el paso 3, la misma unidad se ha dividido en 10 partes iguales, de las cuales se han tomado 7 (color anaranjado), 7 de 10.

La parte de la unidad pintada de anaranjado es siete décimos ( $\frac{7}{10}$ ) de la unidad.

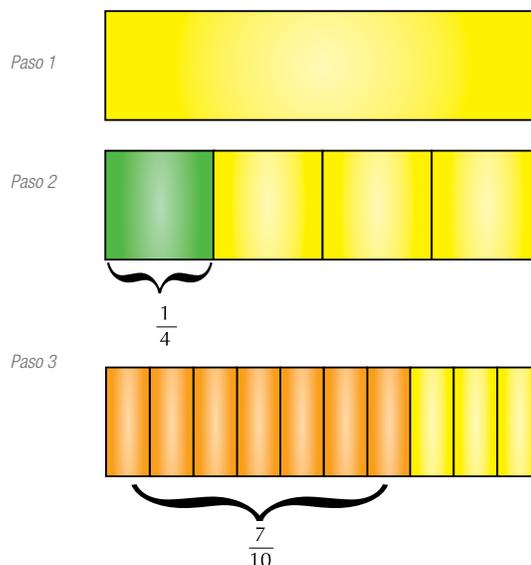


Ilustración 2

En los pasos 1, 2 y 3, a las partes tomadas de la unidad (1, 1, 4) las llamaremos numeradores y a las partes en se divide la unidad, (1, 4, 10) las llamaremos denominadores.

$$\begin{array}{l} 1 \longrightarrow \text{Numerador} \\ 4 \longrightarrow \text{Denominador} \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{7}{10} \longrightarrow \text{Numerador} \\ \frac{7}{10} \longrightarrow \text{Denominador} \end{array}$$

**En la fracción  $\frac{a}{b}$ ; ( $b$  debe ser diferente de cero y  $a$  y  $b$  deben ser números naturales),  $a$  es el numerador y  $b$  es el denominador.  $\frac{a}{b}$  es el cociente (división) entre dos cantidades.  $b$  son las veces en que se divide la unidad y  $a$  son las partes que se toman de ella.**

Las ilustraciones 3, 4 y 5 muestran, tres formas diferentes de representar la fracción:  $\frac{4}{9}$ .

La ilustración 3 representa la longitud de un segmento (parte o pedazo) de recta dividido en nueve partes de igual longitud, de las cuales hay señaladas cuatro. Numéricamente el fraccionario representado es  $\frac{4}{9}$ .

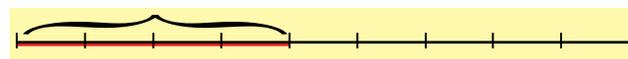


Ilustración 3

La ilustración 4 representa la superficie de un triángulo dividido en nueve partes iguales o triangulitos y cuatro de ellos se han pintado de gris. Numéricamente, los triangulitos grises representan el fraccionario  $\frac{4}{9}$ .

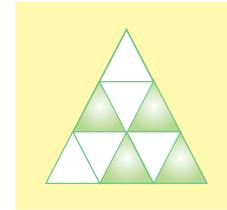


Ilustración 4

La ilustración 5, muestra un total de nueve discos del mismo tamaño y forma, con diferentes colores cuatro de ellos son amarillos.

El fraccionario o número racional que representa la cantidad de discos amarillos es  $\frac{4}{9}$ . Observa que del total de 9 discos hay 4 amarillos, 3 rojos y 2 verdes. Si los discos amarillos representan los  $\frac{4}{9}$  del total, porque hay 4 discos amarillos de 9, entonces piensa cuál fraccionario representaría los discos rojos y cuál fracción sería la que represente los discos verdes. Coméntalo con tus compañeros.

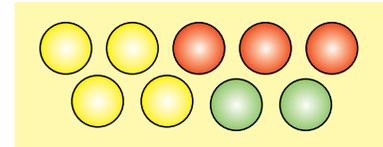


Ilustración 5

### El número mixto

En la ilustración 6, encuentras una fracción que requiere más de una unidad.

Se tomaron 2 unidades y cada una se dividió en 5 pedazos o partes iguales. Entre las dos unidades hay 7 pedazos coloreados, por lo tanto, la parte sombreada o pintada corresponde a la suma de dos partes de una unidad y 5 partes de la otra, es decir,  $\frac{2}{5} + \frac{5}{5} = \frac{7}{5}$ .

Lo anterior significa que la fracción  $\frac{7}{5}$  es igual a dividir, lo cual es igual a  $1\frac{2}{5}$ , el cual se compone de 1 unidad y  $\frac{2}{5}$ . A este resultado se le conoce como número mixto.

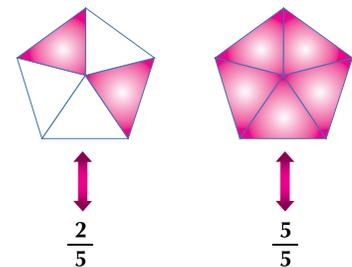


Ilustración 6

**Una fracción que es mayor que la unidad puede escribirse como el número de unidades, seguido por una fracción y se llama número mixto.**



### Aplicación

Resuelve las actividades siguientes, en tu cuaderno y después compara tu trabajo con el de tus compañeros. Sigue la instrucción dada en cada paso.

#### Actividad N° 1

Paso 1. Dibuja un rectángulo del tamaño que quieras y tómalolo como una unidad.

Paso 2. Divide la unidad (el rectángulo) en cinco partes iguales.

Paso 3. Sombrea tres de las cinco partes en que dividiste la unidad.

Paso 4. Escribe el fraccionario que corresponde a la parte sombreada y a la no sombreada.

Paso 5. ¿Qué significa la fracción de la parte sombreada y qué significa la fracción de la parte no sombreada respecto del rectángulo dibujado inicialmente?

**Actividad N° 2**

Paso 1. Dibuja un cuadrado de 4 centímetros de lado; toma este cuadrado como una unidad.

Paso 2. Divide la unidad (el cuadrado), en 16 partes iguales.

Paso 3. Sombrea del color que quieras, 18 partes en total. ¿Te alcanza un solo cuadrado? O ¿necesitas otra unidad?

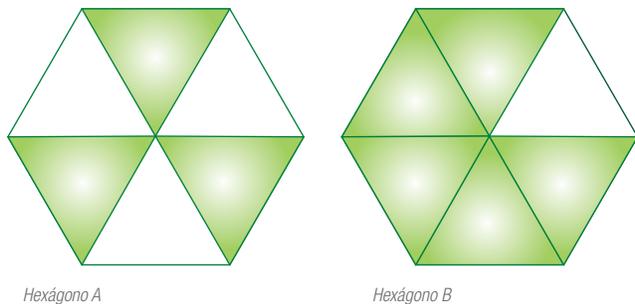
Paso 4. Escribe la fracción que corresponde a la parte sombreada como número mixto y de la parte no sombreada.

Paso 5. ¿Qué significa la fracción de la parte sombreada y qué significa la fracción de la parte no sombreada respecto de las unidades tomadas.

3. A continuación encuentras dos hexágonos regulares (congruentes y semejantes). Tomando cada polígono como una unidad. Responde lo siguiente:

- Cada unidad está dividida en \_\_\_\_ partes iguales.
- El hexágono A tiene \_\_\_\_ partes sombreadas.
- El hexágono B tiene \_\_\_\_ partes sombreadas.
- Verifica si el total de partes sombreadas entre los dos hexágonos es mayor que una unidad.

Explica por qué y de ser así, exprésalo como un número mixto.



4. Escribe el número en fracción, correspondiente a la parte sombreada.

- 
- 

- 
- 
- 

- Si la fracción  $\frac{5}{10}$  se representa con 10 letras S.
  - Explica cuántas letras S le corresponden a una unidad.
  - Representa con letras S la fracción  $\frac{11}{10}$ .
- Luisita bajó 15 naranjas del cultivo que tiene en su finca y  $\frac{1}{3}$  de ellas se lo dio Natalia. ¿Cuántas naranjas dejó para ella?



7. Veinte bultos o sacos de café representan  $\frac{1}{4}$  de lo cosechado por Tomás.  
 ¿En cuántos sacos está representada la cosecha de Tomás?



Representa gráficamente cada uno de los fraccionarios:

8.  $\frac{9}{4}$

9.  $\frac{10}{3}$

10.  $\frac{43}{9}$

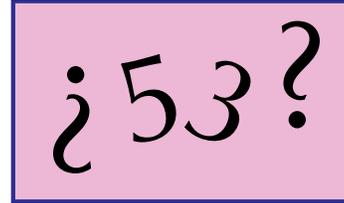
### Entendemos por...

**Cociente** el resultado de dividir una cantidad entre otra. El cociente indica cuántas veces está contenido el divisor entre el dividendo. En una fracción, el denominador se desempeña como divisor y el numerador como dividendo. Por ejemplo  $\frac{2}{3}$  equivale a la división 2 entre 3 ó  $2 \overline{) 3}$

### Diversión matemática

Con el número cinco escrito 5 veces y el número 3 escrito 3 veces y los signos matemáticos +, -, x, ÷ y () forma expresiones matemáticas, equivalentes a 53.

Ejemplo:  $(5 \times 5) + (5 \times 5) + (5 - 3) + 3/3$ .



### Día a día

#### Pulmón del Planeta

La selva amazónica se desarrolla alrededor del río Amazonas y de su cuenca fluvial. Las altas temperaturas favorecen el desarrollo de una vegetación tupida y abundante, siempre verde.

Se le llama el Pulmón del Planeta, ya que mantiene un equilibrio climático: los ingresos y salidas de  $CO_2$  y de  $O_2$  están balanceados.

Los científicos ambientalistas concuerdan en que la pérdida de la biodiversidad es resultado de la destrucción una buena fracción de la selva. Existen en ella innumerables especies de plantas todavía sin clasificar, miles de especies de aves, innumerables anfibios y millones de insectos.



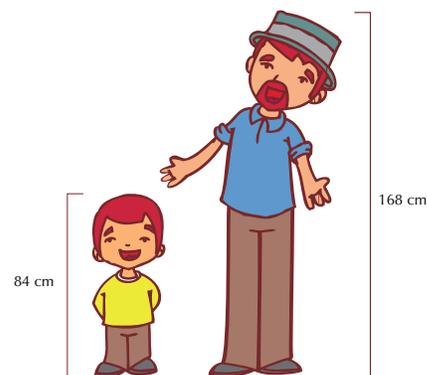
## Tema 2. Comprendo el significado de la fracción como razón



### Indagación

La estatura de Rodolfo es 168 cm y la estatura de su hijo es 84 cm. Ellos aparecen en la figura de tu derecha. Resuelve en tu cuaderno lo siguiente:

- Calcula cuántos centímetros es más alto Rodolfo que el niño.
- Encuentra cuántas veces es más alto Rodolfo que el niño.



### Conceptualización

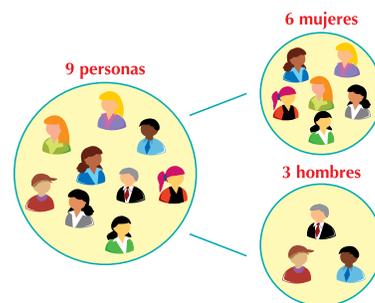
El resultado de la comparación de dos magnitudes se llama **razón**. Analicemos las dos situaciones siguientes:

#### Situación 1.

En un salón de clases, la relación entre mujeres y hombres es de 6 a 3, significa que por cada 6 mujeres hay 3 hombres, es decir; que de 9 estudiantes, 6 son mujeres y 3 son hombres.

Es decir son mujeres  $\frac{6}{9}$  y son hombres  $\frac{3}{9}$ .

Decimos que la relación de mujeres a hombres es 6:3 y se lee “seis es a tres” y la relación de hombres a mujeres es de 3:6 ó también puede escribirse  $\frac{6}{3}$  (primera relación) y  $\frac{3}{6}$  (segunda relación).



#### Situación 2.

En una reunión hay hombres y mujeres. Analicemos los casos siguientes:

- En la reunión hay 1 hombre por cada 3 mujeres; es decir, que de cada 4 personas, 1 es hombre y 3 son mujeres.

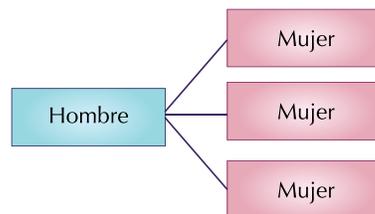
La razón de hombre a mujer es 1:3 se lee: “uno es a tres” o también puede escribirse  $\frac{1}{3}$ .

¿Cómo será la relación de mujeres a hombre?

¿Cómo será la relación de hombre a mujeres?

¿Cómo será la relación de hombre respecto al número de personas que hay en la reunión?

¿Cómo será la relación de mujeres respecto al número de personas que hay en la reunión?





## Aplicación

En tu cuaderno, copia, analiza y soluciona las situaciones que se presentan a continuación.

1. En un almacén de automóviles de cada 4 autos, 3 son de color blanco.
  - a. Escribe la fracción que determina la razón en esta situación.
  - b. Elabora una tabla de datos para cada 4, 8, 12, etc. autos y los correspondientes de color blanco con su respectiva relación. ¿Cuál es la razón en cada caso?
  - c. Si hay un total de 24 automóviles, explica cuántos automóviles son de color blanco y por qué.
  
2. En un salón de clases hay 35 estudiantes de los cuales 10 son hombres y 25 son mujeres. ¿Puedes afirmar que por cada 2 hombres hay 5 mujeres? Explica.
  
3. En un cultivo de flores hay 72 empleados, de los cuales 54 se dedican a la recolección y cuidado de las flores y 18 a seleccionar y empacar el producto final. ¿La relación entre empacadores y recolectores es: 1:2, 1:3 o 1:4? Explica tu respuesta.
  
4. En un salón de clases 28 estudiantes pasaron sin perder materias en el primer período y los 12 estudiantes restantes perdieron una o más asignaturas. ¿Es correcto afirmar que por cada 7 estudiantes que ,3 estudiantes perdieron una o más asignatura? Explica por qué.
  
5. ¿Cuál es la razón entre dos grupos de estudiantes si se sabe que 20 tienen menos de 12 años y 24 tienen doce o más años? Escribe la razón y su significado.



### Entendemos por...

**Razón** aquella relación entre dos magnitudes que se comparan. La razón puede darse como una fracción, aunque existen otros tipos de razones entre dos magnitudes tales como la razón geométrica y la razón aritmética y otras.

### Diversión matemática

#### El rebaño más pequeño

Un granjero que tiene un rebaño de ovejas muy numeroso. Descubre una gran singularidad con respecto a su número. Si las cuenta de dos en dos, le sobra 1. Lo mismo ocurre cuando las cuenta de 3 en 3, de 4 en 4, etc.... hasta de 10 en 10, siempre sobra 1.  
¿Cuál es el rebaño más pequeño que se ajusta a estas condiciones?



### Día a día

#### Un buen jardín

Lograr construir un auténtico jardín en el hogar, es de alguna manera, poseer una obra de arte. Las mejores condiciones para el crecimiento y la salud de una planta, están en los factores externos que influyen en la vegetación: el clima, el ambiente, el tipo de suelo, la luz, la temperatura, y la humedad.



Para tener un hermoso jardín debe cuidarse la proporción de agua y los porcentajes de abonos que las plantas requieren.

Los componentes básicos de cualquier fertilizante son nitrógeno, fósforo y potasio. La diferencia entre unos y otros está en las proporciones utilizadas de cada uno de estos componentes.

Un fertilizante 20-20-20 tiene iguales proporciones de nitrógeno, fósforo y potasio.

El 5-10-5 indica mayor proporción de fósforo.

Los fertilizantes también contienen otros nutrientes como hierro, magnesio, calcio, zinc y sulfuros.

Un fertilizante que se ajusta a muchos tipos de plantas es el 10-10-10.

[http://plantas.facilísimo.com/reportajes/consejos/como-usar-los-fertilizantes\\_184306.html](http://plantas.facilísimo.com/reportajes/consejos/como-usar-los-fertilizantes_184306.html)

# Tema 3. Comprendo el significado de la fracción como porcentaje

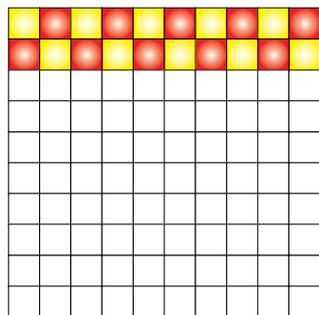


## Indagación

Analiza las situaciones siguientes, con algunos compañeros.

En tu cuaderno, copia el cuadrado del lado izquierdo de esta hoja y realiza cada actividad:

- Dado el cuadrado observa sus divisiones y partes sombreadas:
  - Cuenta las partes en que está dividido ese cuadrado grande.
  - Escribe el número de cuadraditos pequeños que están pintados de amarillo y rojo.
  - Escribe la fracción del cuadrado que representa el número de cuadraditos pintados.



- Escribe el porcentaje del cuadrado que representa el número de cuadraditos pintados, sabiendo que todas las partes en que está dividido el cuadrado corresponden al 100%.

- Gonzalo dice: “El 10 por ciento de los 40 estudiantes del curso prefieren el fútbol”.

- ¿Cuántos estudiantes prefieren el fútbol?
- ¿Qué porcentaje de los estudiantes del curso no prefiere el fútbol?
- ¿Qué fracción representa el 10%?
- ¿Qué fracción representa el 90%?
- ¿Qué porcentaje representa el 100%?



## Conceptualización

Estudia con cuidado los ejercicios siguientes:

- En un grupo hay 100 personas, de las cuales 20 son niños.

Esto significa que por cada 100 personas, hay 20 niños, es decir, que de las 100 personas, la fracción que representa la cantidad de niños es  $\frac{20}{100}$ .

### Solución

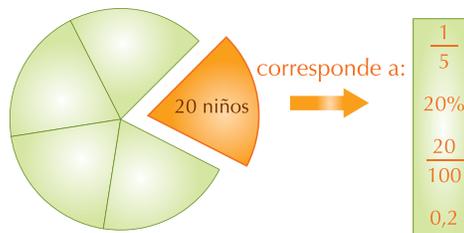
$\frac{20}{100}$  equivale a decir 20 niños de cada 100 personas; esto es, el veinte por ciento y se escribe 20%.

20 niños de 100 personas equivale a decir  $\frac{20}{100}$  que simplificado es igual a  $\frac{1}{5}$  y  $\frac{1}{5}$  indica que hay 1 niño(a) por cada 5 personas.

Y en la relación de porcentaje se expresa

$$\begin{array}{l} 10 \\ 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} 5 \\ 0.2 \end{array} \right. \text{ de donde } \frac{0.2 \times 100}{100} = \frac{20}{100} = 20\%$$

Es decir que 20 niños(as) de las 100 personas corresponden al 20% y el círculo completo representa las 100 personas, esto es, el 100%.



- En una canasta hay 30 huevos rojos y 30 huevos blancos. Se quiere saber:

- ¿Cuántos huevos hay en total?
- ¿Qué fracción de huevos rojos hay?
- ¿Cuál es el porcentaje de huevos rojos?
- ¿Qué fracción de huevos blancos hay?
- ¿Cuál es el porcentaje de huevos blancos?

**Solución**

- En total hay: 30 huevos rojos + 30 huevos blancos = 60 huevos en total.
- 30 huevos rojos de un total de 60 huevos corresponde a la fracción  $\frac{30}{60}$ .  
Como 30 es la mitad de 60, entonces  $\frac{30}{60}$  es igual a  $\frac{1}{2}$ , luego la fracción de huevos rojos es  $\frac{1}{2}$ .
- Como 30 huevos rojos equivalen a  $\frac{1}{2}$  del total de los huevos de la canasta y  $\frac{1}{2}$  es 1 huevo rojo de cada 2 huevos ó  $\begin{array}{r} 10 \\ 0 \end{array} \begin{array}{r} 2 \\ 0.5 \end{array}$  ó  $\begin{array}{r} 10 \\ 0 \end{array} \begin{array}{r} 2 \\ 0.50 \end{array}$  que significa que de 30 huevos, la mitad de ellos son rojos, es decir, 0.5 ó el 50%.
- Si  $\frac{1}{2}$  del total de huevos son rojos, entonces los huevos blancos corresponden a la otra mitad.
- El porcentaje de huevos blancos es 50%.



- A un grupo de personas se le pidió asistir a una reunión, pero solo asistió el 25%. Si el número de personas que asistieron a la reunión fue de 10 ¿A cuántas personas se les pidió asistir a la reunión?

**Solución**

El 25% de asistencia a la reunión equivale a 10 personas. La totalidad de las personas que debían asistir equivale al 100%. Nos preguntamos: ¿Qué parte del 100% es el 25%?

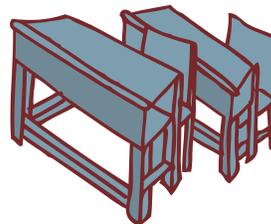
Respondemos: El 25% es la cuarta parte de 100%, porque  $25 \times 4 = 100$ .

Si  $25\% = 10$  personas, entonces, como  $25\% \times 4 = 100\%$ , entonces,  $10 \text{ personas} \times 4 = 40$  personas, que corresponde al 100%, es decir 40 es la totalidad de personas asistieron.

**Aplicación**

Resuelve estos ejercicios en tu cuaderno. Escribe el procedimiento para resolver cada problema y compara con tus compañeros.

- En un salón de clases hay 60 pupitres y el 10% de ellos está dañado. ¿Cuántos pupitres buenos hay?



- Ana tiene 20 discos de música y le regaló a un amigo los  $\frac{15}{20}$ , es decir, le regaló \_\_\_\_\_ discos.



3. Un trabajador ganaba en el año 2010 \$515,000, si para el año 2011 le aumentaron los  $\frac{4}{100}$  del sueldo, explica,



- ¿Cuánto dinero le aumentaron al trabajador?
- ¿Cuánto gana en el 2011?

4. En un salón de clase hay 45 estudiantes, si para el próximo año se espera un aumento de  $\frac{120}{100}$ , ¿Cuántos estudiantes nuevos se aspira tener para el próximo año? Explica.



5. En un frutero hay bananos y granadillas, el 40% de las frutas del frutero es igual a 4 bananos,



- ¿Cuántas granadillas hay?
- ¿Cuántas frutas habrá en total?

6. El 120% es igual a \$240,000. ¿Cuánto dinero es el 10%?

7. En un cuadro hay pintadas 5 manzanas, 3 peras y 2 anones, escribe la fracción que representa cada clase de fruta, en el cuadro.



- Si el 35% es igual a 105. ¿Cuánto será el 50%?
- El 30% es igual a 60. ¿A cuánto corresponde el 100%?
- Inventa un problema en el que se utilice porcentaje.

### Entendemos por...

**Porcentaje** a la fracción cuyo denominador es 100.

Por ejemplo: decir que se tomó el 37% de una cantidad significa que se tomó 37 de cada 100 unidades o que se tomó  $\frac{37}{100}$  del total.

### Diversión matemática

#### Método árabe de multiplicación

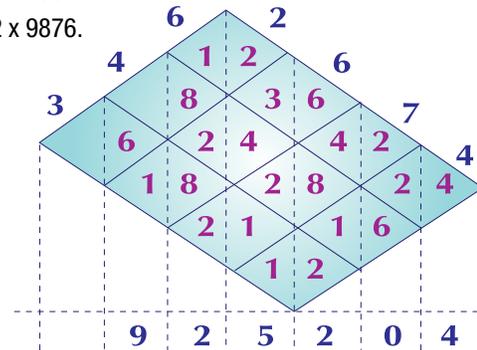
Todavía lo practican algunos árabes de ciertas regiones.

En el ejemplo se muestra el producto de

$346 \times 2,674 = 925,204$ . Descubre cómo funciona.

Realiza por este método los siguientes productos:

- $789 \times 1358$ .
- $5432 \times 9876$ .



### Día a día

#### La finca moderna

Hoy se trabajan formas alternativas de producción y conservación, que buscan: Crear sistemas agrícolas de bajo consumo de energía y alta productividad.

Concebir la vivienda como parte integrante del ciclo ecológico de la parcela.

Obtener el mayor grado de autosuficiencia posible.

Emplear técnicas y tecnologías accesibles.

Buscar una producción integrada al desarrollo humano y ecológico.

Muchas familias campesinas tienen una porción de tierra (fracción de una finca), que manejada con buenas técnicas, podrían proporcionarles alimentos suficientes para satisfacer necesidades de la familia y mercados locales.

Piensa en un lugar o fracción de la casa o finca en donde podría aprovecharse para hacer una huerta.



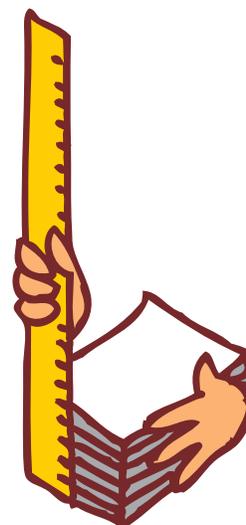
## Tema 4. Fracciones decimales



### Indagación

Una forma de medir el grosor de una hoja de papel es acomodando varias hojas de papel de la misma calidad y organizarlas en un paquete compacto y comprimido con los dedos o con una prensa.

Manuel midió el grosor de 100 hojas en el libro de matemáticas. ¿Cuál es el grosor de una hoja del libro de matemáticas si las 100 hojas miden 17 milímetros?



### Conceptualización Noción de número decimal

Los estudiantes de una clase de educación física realizaron un trabajo de investigación sobre atletismo y entre otros datos obtuvieron los correspondientes a algunas marcas mundiales.

Por ejemplo:

Modalidad	Descripción	Marca
Salto alto.	Edward Ashley, uruguayo ocupó primer puesto 6 de marzo de 2011.	1.82 metros.
Salto largo.	El estadounidense Dwight Phillips, en el Mundial de atletismo, Corea del sur 2011 medalla de oro.	8.45 metros.
Salto triple.	La antioqueña Caterine Ibargüen, obtuvo la medalla de bronce, en salto triple con una marca de, en el Mundial de Atletismo, en Corea del Sur 2011.	14.84 metros.
Salto con garrocha.	La brasileña Fabiana Murer, medalla de oro, en el Mundial de Atletismo, Corea del Sur 2011.	4.85 metros.

Al observar los números que expresan estas marcas, es notorio que 1.82, 8.45, 14.85 y 4.85 no son números naturales. Estos números expresan la medida en metros de la distancia total alcanzada en el salto.

Desde luego, es razonable pensar en la imposibilidad de que los atletas salten siempre un número exacto de metros. Entonces, al ver estas cantidades, es necesario considerar que a la izquierda del punto está anotado el número de metros completos (unidades) que el atleta saltó,

y a la derecha del punto la fracción de metro que completa la medición realizada; por ejemplo en salto de altura 2 m (unidades) 4 dm y 5 cm.

A las fracciones que aparecen a la derecha del punto, se les llama fracciones decimales y resultan al dividir la unidad o el referente en partes iguales, basándose en la estructura del sistema de numeración decimal.

En el caso del metro, el decímetro es la décima parte de él.

$1 \text{ decímetro} = \frac{1}{10} \text{ m} = 0.1 \text{ m} = 1 \text{ décima de metro}$
$1 \text{ centímetro} = \frac{1}{10} \text{ dm} = 0.1 \text{ dm} = 1 \text{ décima de decímetro}$
$1 \text{ centímetro} = \frac{1}{100} \text{ m} = 0.01 \text{ m} = 1 \text{ centésima de metro}$
$1 \text{ milímetro} = \frac{1}{10} \text{ cm} = 0.1 \text{ cm} = 1 \text{ décima de centímetro}$
$1 \text{ milímetro} = \frac{1}{100} \text{ dm} = 0.01 \text{ dm} = 1 \text{ centésima de decímetro}$
$1 \text{ milímetro} = \frac{1}{1,000} \text{ m} = 0.001 \text{ m} = 1 \text{ milésima de metro}$

Como puedes observar a la derecha del punto, o parte decimal del número, cada lugar vale diez veces más que su vecino de la derecha. Lo mismo que ocurre en la parte entera del número, a la izquierda del punto decimal. Es una forma coherente de ampliar el Sistema de Numeración Decimal.

Lo anterior se muestra en el esquema, a continuación, y en el cual se hace referencia a la parte entera y a la parte fraccionaria o decimal, así como al punto decimal.

Unidades de millón
Centenas de millar
Decenas de millar
Unidades de millar
Centenas
Decenas
<b>UNIDADES</b>
Punto decimal
Décimas
Centésimas
Milésimas
Diezmilésimas
Cienmilésimas
Millonésimas

La notación decimal también se usa en cálculos de carácter científico, técnico y comercial. Por lo tanto, se requiere conocer y manejar en forma correcta los decimales en muchas actividades de la vida profesional y cotidiana.

## Lectura y escritura de números decimales

Para la representación del número de objetos que integran una colección se usan los números naturales, pero cuando se trata de indicar el número de partes iguales en las cuales se divide la unidad, colección, o referente, se utilizan los números fraccionarios, los cuales se pueden escribir en forma decimal.

Para escribir fracciones decimales, es necesario considerar el esquema siguiente: obsérvese que a la derecha de la parte entera de una cantidad se escribe la parte fraccionaria, y se coloca un punto de separación entre ambas:



Tengamos en cuenta que si una unidad se divide en diez partes iguales, cada una de ellas se llama décima

Si una de las partes obtenidas (décimas) se divide nuevamente entre 10, se obtienen otras diez partes y cada una se llama centésima por ser la centésima parte de la unidad. Su representación es: 0.01.

De esta forma, dividiendo sucesivamente entre diez, se obtienen partes cada vez más pequeñas que se representan y nombran de la siguiente manera:

Representación	Nombre
$1 \div 10$	Décimas
$0.1 \div 10$	Centésimas
$0.01 \div 10$	Milésimas
$0.001 \div 10$	Diezmilésimas
$0.0001 \div 10$	Cienmilésimas
$0.00001 \div 10$	Millonésimas

**La lectura de fracciones escritas en forma decimal se efectúa como si fuera un número natural, pero agregándole el nombre de la posición que ocupa la última cifra de la derecha.**

Ejemplos:

Números	Se lee
0.4	Cuatro décimas.
0.32	Treinta y dos centésimas.
1.265	Un entero, doscientos sesenta y cinco milésimas.
0.0807	Ochocientos siete diezmilésimas.
0.008	Ocho milésimas.

Obsérvese que el uso del cero es determinante para establecer el valor de las demás cifras.

Cuando en un número decimal la parte entera no es 0, también se puede leer de la siguiente manera: se nombra la parte entera y después la parte fraccionaria.

Ejemplos:

Números	Se lee
4.23	Cuatro enteros, veintitrés centésimos.
1.003	Un entero, tres milésimos.

¿Cómo se leerían los números 140.0807; 5.69; 1.265.

Nótese que en la representación y lectura de números decimales la colocación del punto decimal es decisiva, ya que de él depende el valor de la fracción.

### Comparación de fracciones decimales

Al comparar dos o más números decimales, se determina si uno es mayor, menor o igual que el otro; para saberlo, se puede seguir el camino que a continuación se presenta:

#### Comparación cifra a cifra:

Sean 0.25 y 0.250.

Si se comparan las cifras que ocupan el lugar de las décimas tenemos que ambas son iguales; en seguida se comparan las cifras que ocupan el lugar de las centésimas: sucede que también son iguales; además los ceros que están después de la última cifra significativa no representan ningún cambio en la cantidad. Por lo tanto, en este caso, ambas cantidades son iguales.

Véase otro caso:

Sean 0.9 y 0.38

Se comparan ambas empezando por los décimos; en este caso, nueve es mayor que tres, por tanto, 0.9 es mayor que 0.38, lo cual se representa así  $0.9 > 0.38$ .

Si se tiene ahora: 0.256 y 0.27

La comparación se hace ahora con las centésimas, como 5 es menor que 7, entonces, 0.256 es menor que 0.27, lo cual se representa  $0.256 < 0.27$ .

Para determinar si una fracción decimal es mayor que otra no se toma en cuenta la cantidad de dígitos que las componen, sino que se empieza la comparación a partir de las décimas, hasta llegar a observar en qué posición está una cifra mayor que otra.

De ese modo es posible comparar los decimales para determinar cuál es mayor, menor o igual.

Ejemplos:

$0.75 > 0.69$  porque **7** es mayor que **6**.

$0.28 < 0.5$  porque **2** es menor que **5**.

$0.1049 > 0.1048$  porque **9** es mayor que **8**.

### Los decimales en la recta numérica

Los números decimales también pueden representarse en la recta numérica.

Si se considera que los números decimales pueden contener décimas, centésimas, milésimas, etcétera, la unidad deberá dividirse en 10, 100, 1000, etc. partes iguales, respectivamente.

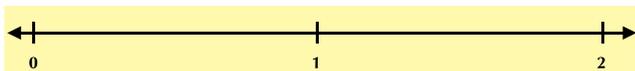
En la recta numérica, una unidad es el segmento de recta comprendido entre dos enteros consecutivos.

Analicemos los ejemplos:



En la recta anterior se representan dos unidades: la primera es el segmento que tiene por extremos el 0 y el 1; en tanto que en la segunda, el segmento va de 1 a 2.

1. Representemos en la recta numérica los números decimales 0.4 (cuatro décimas) y 1.8 (un entero ocho décimas).

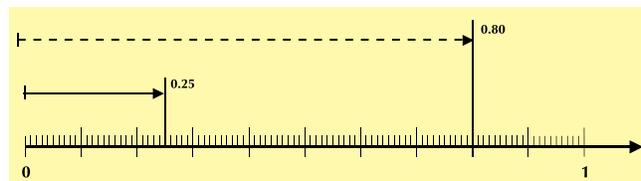


Como los números ejemplificados tienen una cifra decimal, se habla de décimas; por lo cual se subdividirá cada segmento que sirve como unidad en 10 partes iguales.



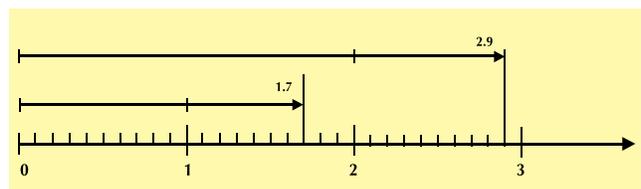
En los dos números anteriores se tomó como punto de partida el 0, y de él se contaron, primero, 4 marcas (cuatro décimas), y después 18 marcas (dieciocho décimas) para localizar el punto que representa a cada número decimal.

2. Representemos en la recta 0.25 (veinticinco centésimas) y 0.80 (ochenta centésimas). Como los números son centésimas, la unidad deberá dividirse en 100 partes iguales. Ya que ambos números decimales son menores que la unidad, su representación se encontrará entre 0 y 1.



La localización del punto que representa cada número decimal se efectúa contando, a partir de cero, 25 y 80 marcas, respectivamente.

3. Representemos en la recta numérica los números decimales 1.7 (un entero, siete décimas) y 2.9 (dos enteros, nueve décimas). Como se habla de décimas, los segmentos unidad se dividirán en 10 partes iguales. El primer número decimal se localizará entre 1 y 2 por ser mayor que 1 y menor que 2; el número decimal 2.9 se localizará entre 2 y 3 por ser mayor que dos y menor que tres.



Para localizar el punto que representa el número decimal 1.7 se considera su lectura: 1 entero y 7 décimas; para ubicar el punto que representa el número decimal 2.9, debe recordarse que equivale a 2 enteros y 9 décimas.

Un metro dividido en decímetros, centímetros y milímetros es un ejemplo concreto de una recta numérica con decimales: con él se efectúan mediciones y se considera el 0 como punto de partida. Para encontrar en la recta numérica el punto que representa a un número decimal, primero se divide cada unidad en partes iguales (10 si son décimas, 100 si son centésimas, 1,000 si son milésimas, 10,000 si son diezmilésimas, etcétera.) y después, a partir del 0, se cuentan tantas marcas como lo indique el número decimal.

### Adición y sustracción de decimales

Son muchas las situaciones diarias en las que se requiere realizar adiciones con decimales para resolver problemas que tienen que ver con medidas, peso, tiempo, dinero, etcétera.

Veamos el siguiente problema:

- La mamá de Juan quiere hacerle un traje y para ello, necesita tela. Para el pantalón requiere 1.10 m y para el saco 1.35 m, ¿cuántos metros necesita en total?



Al resolver el problema con los datos proporcionados, el planteamiento de solución requiere una suma:

1.10 m + 1.35 m y se solucionaría siguiendo tres pasos:

1. Se escriben los números, uno debajo de otro, de manera que los décimos queden en una columna, los centésimos en otra, y así sucesivamente.

$$\begin{array}{r} 1.10 \\ 1.35 \end{array}$$

2. La suma se iniciará por la columna de la derecha, tomando los lugares vacíos como ceros, y al llegar al punto decimal, éste se anotará alineándolo con los de arriba.

$$\begin{array}{r} 1.10 \\ + 1.35 \\ \hline 0.45 \end{array}$$

3. Se suma la parte entera

$$\begin{array}{r} 1.10 \\ + 1.35 \\ \hline 2.45 \end{array}$$

En total necesita 2.45 m. de tela.

Se observa, en el resultado de la suma con decimales, que las unidades del mismo orden se acomodan en forma vertical y luego se suman las columnas, del mismo modo que se realiza con los números naturales.

En los números decimales también es necesario tener en cuenta la forma de realizar la sustracción. Veamos el ejemplo siguiente:

- Un trabajador instaló 12 m<sup>2</sup> de alfombra en una casa. El primer día instaló 1.90 m<sup>2</sup>. Después de dos días de trabajo ha instalado 7.58 m<sup>2</sup>, ¿Cuántos metros cuadrados de alfombra instaló el segundo día?

La situación planteada se presenta así:

Hay una adición de dos sumandos y se desconoce uno de ellos.

$$\begin{array}{r} 1.90 \text{ m}^2 \\ \text{Trabajo del} \\ \text{primer día} \end{array} + \begin{array}{r} \boxed{\phantom{00}} \text{ m}^2 \\ \text{Trabajo del} \\ \text{segundo día} \end{array} = \begin{array}{r} 7.58 \text{ m}^2 \\ \text{Trabajo de} \\ \text{los dos días} \end{array}$$

Una operación para encontrar la respuesta es la sustracción.

$$\begin{array}{r}
 7.58 \text{ m}^2 - 1.90 = \boxed{\phantom{00}} \text{ m}^2 \\
 \text{Suma} \qquad \text{sumando} \qquad \text{sumando} \\
 \text{Conocido} \qquad \qquad \text{que falta}
 \end{array}$$

La sustracción es la operación inversa a la adición.

Los términos de la sustracción son:

$$\begin{array}{r}
 7.58 \text{ m}^2 - 1.90 \text{ m}^2 = 5.68 \text{ m}^2 \\
 \text{Minuendo} \qquad \text{sustraendo} \qquad \text{resta o} \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \text{diferencia}
 \end{array}$$

Lo importante es darse cuenta de que el sustraendo se coloca debajo del minuendo y el punto decimal se alinea verticalmente. Se resta como si fueran números naturales, de tal manera que el punto decimal del resultado se alinea con el punto decimal de los demás elementos. Así:

$$\begin{array}{r}
 7.58 \text{ minuendo} \\
 - 2.90 \text{ sustraendo} \\
 \hline
 5.68 \text{ resta, diferencia}
 \end{array}$$

Un caso que merece tomarse en cuenta es cuando el minuendo tiene más o menos cifras decimales que el sustraendo.

Ejemplos:

- a.  $1,003.003 - 478.25$ . Para realizar esta operación, se obtiene un decimal equivalente al sustraendo, agregándole a éste un 0 a la derecha.

$$\begin{array}{r}
 1,003.003 \\
 - 478.250 \\
 \hline
 524.753
 \end{array}$$

- b.  $748.0130 - 0.2476$ . Para realizar esta operación, se busca un decimal equivalente al minuendo. Por lo que se le agrega a éste un 0 a la derecha.

$$\begin{array}{r}
 748.0130 \\
 - 0.2476 \\
 \hline
 747.7654
 \end{array}$$

Por otra parte, es notable el hecho de que cuando el minuendo es menor que el sustraendo no existe un decimal positivo que sea el resultado de la operación.

Es decir:

**Si  $a, b$  y  $c$  son números decimales positivos, entonces  $a - b = c$ , si y sólo si  $a$  es mayor o igual que  $b$ .**

### Multiplicación de decimales

En la multiplicación de números decimales se usa el mismo procedimiento que en los números naturales, la única diferencia es la posición que le corresponde al punto decimal en el producto.

Analícemos los ejemplos:

1. Si se multiplica  $2.3528 \times 4$ , hay que considerar que esta operación se puede resolver si pensamos que  $2.3528$  se suma 4 veces. Entonces se tiene:

$$\begin{array}{r}
 2.3528 \\
 + 2.3528 \\
 2.3528 \\
 \hline
 2.3528 \\
 \hline
 9.4112
 \end{array}$$

Observa que:

$$2.3528 = \frac{23,528}{10,000} \Rightarrow \frac{23,528}{10,000} \times 4 = \frac{23,528 \times 4}{10,000}$$

Para obtener el producto final se requiere multiplicar “normalmente” los dos números y luego efectuar la división, es decir, separar en el producto de derecha a izquierda 4 cifras, colocando el punto decimal.

$$\frac{23,528 \times 4}{10,000} = \frac{94,112}{10,000} = 9.4112$$

Si la multiplicación se resuelve de la manera usual, olvidando el punto decimal, queda:

$$\begin{array}{r} 23528 \leftarrow \text{factor} \\ \times 4 \leftarrow \text{factor} \\ \hline 94112 \leftarrow \text{producto} \end{array}$$

Para determinar la posición del punto en el producto, se cuenta el total de cifras decimales que tienen los factores (en este caso hay 4), lo que indica que en el producto habrá 4 cifras decimales, las mismas que se cuentan de derecha a izquierda, o sea:

$$\begin{array}{r} 2.3528 \leftarrow \text{cifras decimales} \\ \times 4 \leftarrow \text{ninguna cifra decimal} \\ \hline 9.4112 \leftarrow \text{producto con 4 decimales} \end{array}$$

¿Cómo proceder para hallar el producto de 0.0265 y 0.451?

$$\frac{265}{10,000} \times \frac{451}{1,000} = \frac{265 \times 451}{10,000 \times 1,000} = \frac{110,515}{10,000,000}$$

¿Cuántas cifras deben contarse para colocar el punto decimal?

¿Cómo puede explicarse el procedimiento?  
 $0.0265 \times 0.451 = 0.0119515$  ¿Cómo lees el producto?

## División de números decimales



El servicio de larga distancia nacional cobra \$246.35 por minuto para llamar entre Bogotá y Cali, en el horario nocturno. Doña María quiere llamar a su hijo, pero no desea pagar más de \$2,000. ¿Durante cuántos minutos máximo podrá hablar?

Esta situación requiere dividir la cantidad de dinero que tiene doña María (\$2,000) entre el costo de un minuto de servicio telefónico (\$246.35), así:

$$2,000 \overline{) 246.35}$$

En la forma en que están expresadas estas cantidades no se puede proceder de inmediato a realizar la operación, ya que en el dividendo existen solamente unidades, mientras en el divisor hay unidades y parte fraccionaria. Las centésimas (35) no se pueden transformar en unidades pero las unidades (246), sí se pueden convertir en centésimas.

No hay que olvidar que 246.35 representa 24,635 centésimas, ya que la cifra 5 está en el lugar de las centésimas.

Ahora bien, ya tenemos solo centésimas en el divisor, por lo que también debemos tener sólo centésimas en el dividendo.

Una unidad equivale a 100 centésimas, por lo tanto, 2,000 unidades equivalen a 2,000 veces 100 centésimas, o sea:

$$2,000 \times 100 = 200,000$$

De manera que la división se puede expresar como:

200,000 centésimas  $\div$  24,635 centésimas

$$200\ 000 \overline{) 24\ 635}$$

De tal manera que puede realizarse como si fueran números naturales.

$$\begin{array}{r} 200\ 000 \overline{) 24\ 635} \\ \underline{2\ 920} \phantom{0} \\ 8 \phantom{00} \end{array}$$

El cociente (8) indica el número de minutos que puede hablar, y el residuo (2,920 centésimas), la cantidad de dinero que le sobra (\$29.20), es insuficiente para hablar otro minuto por teléfono.

Lo anterior se puede comprobar multiplicando el costo de un minuto telefónico (\$246.35) por el cociente de la división (8 minutos) y agregando el residuo (\$29.20).

$$\begin{array}{r} 246.35 \\ \times \quad 8 \\ \hline 1,970.80 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1,970.80 \\ + \quad 29.20 \\ \hline 2,000.00 \end{array}$$

Estas operaciones confirman que con \$2,000 la señora María habla durante 8 minutos y le sobran \$29.20.

Es importante darse cuenta de que una división en la que haya decimales se puede realizar con el mismo algoritmo empleado para los números naturales, a condición de que previamente se tenga el cuidado de ver que los números (el dividendo y el divisor) estén expresados en fracciones del mismo valor (décimas, centésimas, milésimas, etcétera).

Por ejemplo, realiza:  $534.08 \overline{) 3.4}$

3.4 = treinta y cuatro décimas.

534.08 = cincuenta y tres mil cuatrocientos ocho centésimas.

Como una décima es igual a 10 centésimas, 34 décimas es igual a 340 centésimas. Entonces se tiene: 53,408 centésimas ÷ 340 centésimas.

Por lo tanto, se puede operar como se hace con los números naturales, o sea:

$$\begin{array}{r} 53,408 \overline{) 340} \\ 1940 \quad 157.08 \\ 2408 \\ 02800 \\ 080 \end{array}$$

Obteniéndose que en esta división el residuo es de 28 unidades; para la situación inicial se trata de 28 centésimas.

Para comprobar, se multiplica el cociente (157) por el divisor (3.4) y se agrega el residuo (28 centésimas):

$$\begin{array}{r} 157 \\ \times 3.4 \\ \hline 628 \\ 471 \phantom{0} \\ \hline 533.8 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 533.80 \\ + \quad 0.28 \\ \hline 534.08 \end{array}$$

Como al final se obtuvo el dividendo (534.08), queda comprobado que 157 es la solución.

Ahora, supóngase que el cociente deba tener una aproximación a centésimas.

En ese caso se continúa dividiendo de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r} 53,408 \overline{) 340} \\ 1940 \quad 157.0 \\ 2408 \\ 0280 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 53,408 \overline{) 340} \\ 1940 \quad 157.08 \\ 2408 \\ 02800 \\ 080 \end{array}$$

Se coloca el punto decimal en el cociente y se continúa la división convirtiendo las 28 unidades a décimas y así sucesivamente.

Ahora, el residuo, 2,800, está expresado en centésimas que corresponden, según los números dados inicialmente, a diez milésimas.

Obsérvese que las cifras del cociente son del mismo orden de los dividendos parciales que se van obteniendo al agregarles cero a los residuos.

¿Cuál es el orden del último residuo?

De esta manera se pueden obtener todas las cifras que se requieran en la parte fraccionaria (decimal).

$$\begin{array}{r} 157.08 \\ \times \quad 3.4 \\ \hline 62832 \\ 47124 \phantom{0} \\ \hline 534.072 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 534.0720 \\ + \quad 0.0080 \\ \hline 534.0800 \end{array}$$

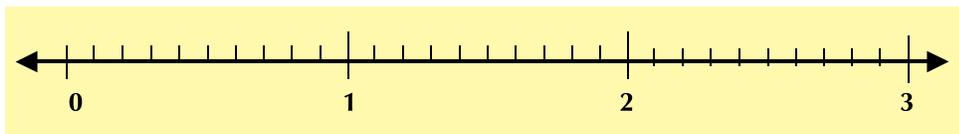
Si se multiplica el cociente (157.08) por el divisor (3.4) y se agrega el residuo (80 diezmilésimas), se obtendrá el dividendo. La obtención del dividendo es la prueba de que el cociente es correcto.



## Aplicación

Copia los ejercicios siguientes en tu cuaderno, resuélvelos y compara tus respuestas con algunos compañeros.

- Escribe con números decimales las cantidades que se mencionan.
  - Luis mide 1 metro con cincuenta centímetros.
  - Mario corrió los 100 m planos en once segundos y cuarenta y tres centésimas de segundo.
  - La red de la cancha de voleibol se colocó a una altura de dos metros y cuarenta y tres centímetros.
  - Andrea compró una sandía que pesó un kilogramo con trescientos cincuenta gramos.
  - La estatura de Pablo es de un metro con cuarenta y seis centímetros.
- Escribe en palabras cada uno de los siguientes números decimales.
  - 0.010101 \_\_\_\_\_
  - 0.3535 \_\_\_\_\_
  - 3.1416 \_\_\_\_\_
  - 0.00063 \_\_\_\_\_
- De las siguientes parejas de números decimales, ¿cuál es el número mayor en cada una?
  - 0.6 y 0.59
  - 0.08 y 0.18
  - 0.35 y 0.239
- Ubica en la recta numérica los siguientes números decimales.
  - 0.3
  - 2.6



- Realiza las operaciones siguientes:
  - $371.002 + 168.1 =$
  - $47.117 + 7.001 =$
  - $128.3 - 41.970 =$



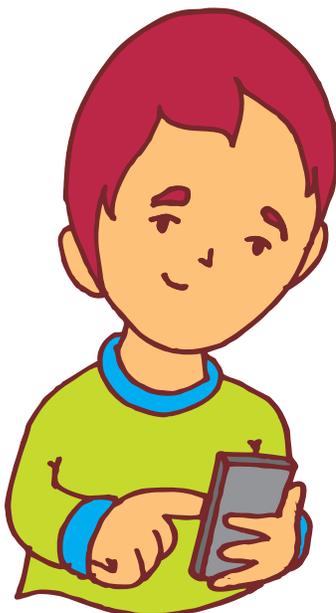
6. Las temperaturas máximas que se registraron durante una semana en la ciudad de Valledupar (departamento del Cesar ) fueron: Lunes  $28.3^{\circ}\text{C}$ ; Martes  $23.7^{\circ}\text{C}$ ; Miércoles  $31.2^{\circ}\text{C}$ ; Jueves  $21.05^{\circ}\text{C}$ ; Viernes  $25.90^{\circ}\text{C}$  ; Sábado  $32.57^{\circ}\text{C}$ .

- Encuentra la diferencia que hay entre el día que se registró la temperatura más alta con respecto a los otros días.
- Encuentra la diferencia que hay entre el día que se registró la temperatura más baja con respecto a los otros días.

7. Tres empresas telefónicas cobran tarifas por minuto de comunicación, a un país de Suramérica así: \$1,757.50 la empresa A, \$1,801.75 la empresa B y \$1,698.45 la empresa C.

Encuentra la diferencia del precio por minuto entre

- Empresa B y empresa A
- Empresa A y empresa C
- Empresa B y empresa C.
- Identifica la mayor diferencia de precios.



8. Mauricio resuelve un problema para lo cual debe sumar 3.24 gramos y 12.6 gramos. Su respuesta es 4.50 gramos.

- ¿Estás de acuerdo con la respuesta?
- ¿Qué crees que olvidó o no ha entendido Mauricio?

9. En un mercado existen tres puestos de frutas y verduras.

El primero vendió 5.25 kg de frutas y 2.75 kg de verduras; el segundo, 3.50 kg de frutas y 3.250 kg de verduras y el último vendió 6.2 kg de frutas y 1.750 kg de verduras.

- ¿Cuántos kg de frutas vendieron los tres puestos?
- ¿Cuántos kg de verduras vendieron los tres puestos?
- ¿Cuántos kg de frutas y verduras vendieron los tres puestos?



10. Una planta extractora de aceite de palma recoge el fruto de tres plantaciones, la primera produjo 55.875 toneladas, la segunda produjo 62.2 toneladas y la tercera 71.435 toneladas.

¿Cuántas toneladas de fruto se procesaron?



### Diversión matemática

#### Sopa de Números

28	21.5	14.4	0.5	17.25	12.75
16	25.45	2.15	3.621	155	
0.75	23.75	19.25	524.7	18	
0.95	15.5	0.18	4.15		
36.21	18.1	215	50		
14	14.5	19.25	37.11		
127.7	140.0	21	0.95		

Encuentra el resultado de cada una de las operaciones

#### Operaciones

$$8.6 \text{ dividido entre } 4$$

$$1.5 + 3.5 + 10.5$$

$$28 \times 0.5$$

$$326.2 - 198.5$$

$$2.5 + 7.5 - 9.25$$

$$0.9 \text{ dividido entre } 5$$

$$0.5 \times 0.5 \times 2$$

$$35.9 + 0.21 + 0.1$$

# Tema 5. Realizo transformaciones con operadores de la forma $xA$



**Indagación**

En algunas situaciones de la vida, las operaciones con los números son necesarias para resolver problemas; con ellas se aumentan o se disminuyen las magnitudes.

Observa los ejemplos siguientes y discute con tus compañeros qué pasó del lado izquierdo al derecho en cada cuadro de: estrellas, corazones y soles



1 estrella → El doble de 1 estrella

1 corazón → El triple de 1 corazón

2 soles → El cuádruplo de 2 soles

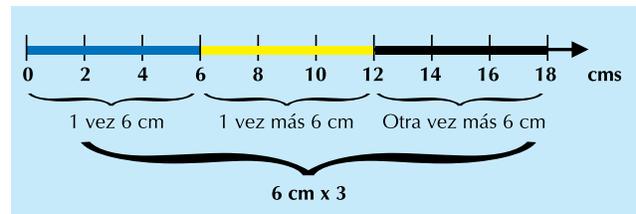
- ¿De izquierda a derecha, aumentan o disminuyen las cantidades de estrellas, corazones y soles? \_\_\_\_\_
- El doble de 5 es \_\_\_\_\_
- El cuádruplo de 3 es \_\_\_\_\_
- El doble de 10 es \_\_\_\_\_
- El triple de 12 es \_\_\_\_\_
- La operación que se aplica en estos ejemplos es \_\_\_\_\_



**Conceptualización**

Estudia con tus compañeros, los ejemplos siguientes:

- $6\text{cm} \times 2$ , significa que 6 cm se ha aumentado dos veces, es decir, el doble.
- $6\text{cm} \times 3$ , significa que 6 cm se ha aumentado tres veces, es decir, el triple.



**Las fracciones como operador aumentan al multiplicar una magnitud si el numerador es mayor que el denominador.**

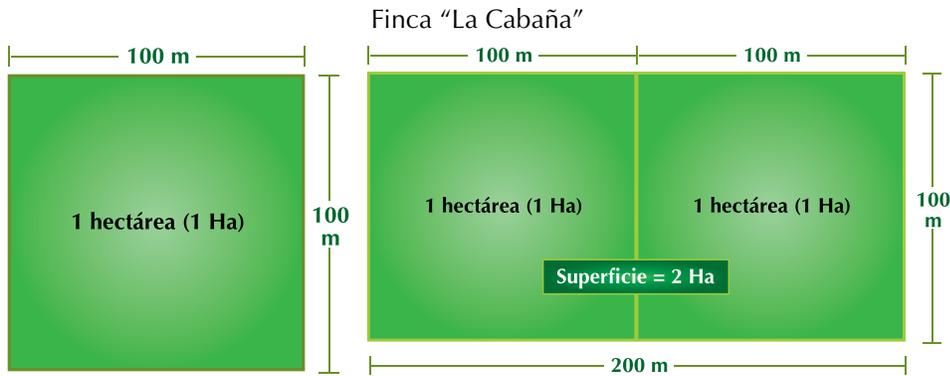
Analícemos la actividad siguiente:

- La finca “La Cabaña” tiene una superficie de 2 hectáreas. La finca “La Alborada”, tiene cinco veces la superficie de “La Cabaña”. ¿Cuál es la superficie de la finca “La Alborada”?

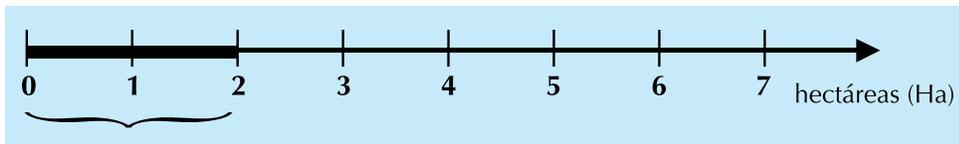
**Solución:**

A continuación vemos qué es una hectárea y representemos el tamaño de “La Cabaña”.

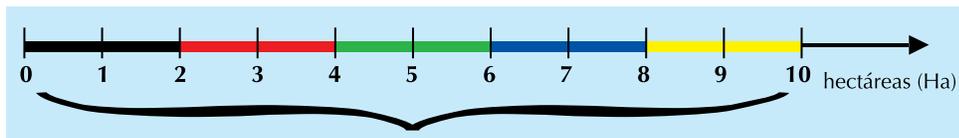
Una hectárea (ha) es la superficie ocupada por un cuadrado que mide 100 metros por cada lado.



La operación que transforma las unidades de superficie aumentándolas cinco veces, es decir, la operación que quintuplica es:  $\times 5$ .



Superficie de la finca "La Cabaña"



Superficie de la finca "La Cabaña"  $\times 5$  = superficie de la finca "La Alborada"  
 Como la finca "La Cabaña" tiene 2 hectáreas (has), entonces: le aplicamos la operación  $\times 5$  y obtenemos la superficie de la finca "La Alborada", esto es:  $2 \text{ has} \times 5 = 10 \text{ has}$ .



### Aplicación

En tu cuaderno copia los ejercicios siguientes, resuélvelos y compara tu trabajo con el de tus compañeros.

1. Aplícale la operación  $\times 3$  al número 14
2. Observa cada representación siguiente y responde:

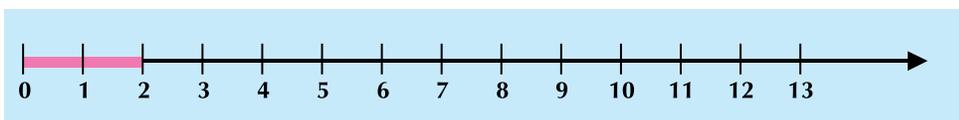


Figura 1

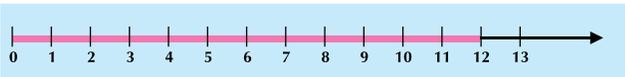


Figura 2

- a. ¿Qué número se representa en la figura 1?
  - b. ¿Qué número se representa en la figura 2?
  - c. ¿Por cuánto se multiplicó al número de la figura 1, para que resultara el número de la figura 2?
3. Observa cada representación siguiente y responde:

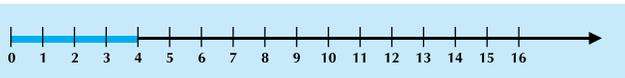


Figura 3

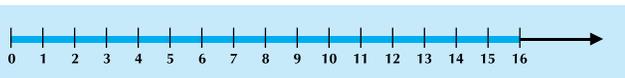


Figura 4

- a. ¿Qué número representa la figura 3?
  - b. ¿Por cuánto se multiplicó al número de la figura 3 para obtener la figura 4?
4. Representa en una semirrecta (rayo) las operaciones siguientes.
- a.  $2 \times 7$
  - b.  $3 \times 5$
  - c.  $7 \times 3$
  - d.  $9 \times 6$

### Entendemos por...

**Transformación** a la modificación, alteración o cambio en la forma de una expresión, pero manteniendo su identidad o valor original. Podemos tener transformaciones numéricas o geométricas. Así por ejemplo, la multiplicación  $\times 9$  transformaría a 3 en 27 porque  $3 \times 9 = 27$ .

### Diversión matemática

Luisa quiere preparar un pastel y de cada paquete de ingredientes, debe tomar las cantidades siguientes:

$\frac{6}{8}$  de un paquete de harina de 1 000 gramos,  $\frac{2}{5}$  de

un paquete de 750 gramos de azúcar y  $\frac{3}{4}$  barra de mantequilla de 200 gramos.

Ayúdala a Luisa a calcular la cantidad de gramos de cada ingrediente, que necesita para preparar el pastel.



### Día a día Campesina colombiana

La mujer campesina se despierta muy temprano a orar a Dios, por sus hijos, su marido y su cosecha. Un día, le preguntaron a un campesino, qué hacía su mujer y este respondió que nada, simplemente estar en la casa.



Pero él no se da cuenta que esta mujer cocina para la familia y los trabajadores, lava, plancha, cuida a los animales, recoge la cosecha, cría animales, seca y lava café, fique, cacao, procesa la leche, trabaja en la molienda de caña y el desgrane de maíz, pero no percibe ingresos. Es jornalera en flores, tabaco, cebolla, cestería, esteras, costales, artesanías, cerámica, tejidos pero se le paga menos que al hombre y en muchas ocasiones, la remuneración va directamente al varón. Si alguna es experta en el manejo de las fracciones es la mujer campesina, pues sabe repartir su tiempo en las múltiples actividades y cumplir con todas.

Texto: <http://www.worldpulse.com/node/14226>

# Tema 6. Realizo transformaciones con operadores de la forma $x \frac{1}{b}$



## Indagación

Copia en tu cuaderno la actividad siguiente y completa los espacios.

1. Observa los recuadros siguientes y analiza y completa las transformaciones que se van realizando al cuadrado de  $10 \times 10$ .

El recuadro representa la unidad (U) que consta de 100 cuadrículas, dispuestas en 10 cuadrículas por cada lado.

**Unidad (U)**

El recuadro a) representa la **mitad** de la unidad, esto es, **50** cuadrículas.

**Media unidad**

o  $\frac{1}{2} U$

El recuadro b) representa la \_\_\_\_\_

Parte de la unidad y consta de \_\_\_\_\_ cuadrículas.

o

El recuadro c) representa la \_\_\_\_\_

parte de la unidad y consta de \_\_\_\_\_ cuadrículas.

**Un décimo de unidad**

o

El recuadro d) representa la \_\_\_\_\_

Parte de la unidad y consta de \_\_\_\_\_ cuadrículas.

o

El recuadro e) representa la \_\_\_\_\_

Parte de la unidad y consta de \_\_\_\_\_ cuadrículas.

o



## Conceptualización

Completa los espacios indicando la operación aplicada, con relación a la unidad (U) de la Fig. 1

En la Fig.1 hay \_\_\_\_\_ caritas.



Figura 1

En la Fig.2 hay \_\_\_\_\_ caritas.

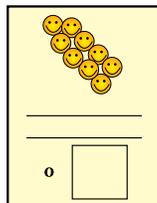


Figura 2

En la Fig.3 hay \_\_\_\_\_ caritas.

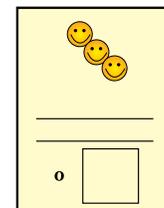


Figura 3

De la Fig.1 a la Fig. 2 se \_\_\_\_\_ la cantidad de caritas. (¿Disminuyó o aumentó?).  
 Cuando una cantidad se disminuye, por ejemplo, de 18 a 9, como en el paso de la Fig.1 a la Fig. 2, se ha dividido entre 2, es decir a 18 se le aplicó la operación  $\frac{1}{2}x$ ,

$$\text{esto es: } \frac{1}{2} \text{ de } 18 = \frac{1}{2} \times 18 = \frac{18}{2} = 18 \div 2 = 9$$

De la Fig.2 a la Fig. 3 se \_\_\_\_\_ la cantidad de caritas. (¿Disminuyó o aumentó?).

Aquí la operación es  $\frac{1}{3} \times 9$  porque  $\frac{1}{3} \times 9 = \frac{1}{3} \times \frac{9}{1} = \frac{9}{3} = 3$ . Porque  $\frac{1}{3}$  significa “la tercera parte de”.

**La fracción como operación  $\frac{1}{b}$  reduce la unidad de una magnitud: a la mitad, a la tercera parte, a la cuarta parte, etc., según el denominador de la fracción.**



**Aplicación**

Resuelve en tu cuaderno y compara tu trabajo con el de algunos compañeros(as):

- En un salón comunitario hay 80 personas. ¿Cuántas personas son hombres, si se sabe que son la cuarta parte del total? ¿Cuál es la fracción como operación? Explica cómo resolviste el problema.
- La extensión de una finca se puede medir en hectáreas también. Un granjero tiene una finca de 750 hectáreas, de las cuales ha destinado la tercera parte para la cría de ganado.
  - ¿Cuántas hectáreas están destinadas para la cría de ganado?
  - ¿A qué fracción de la extensión de la finca corresponde la de la cría de ganado?
- Multiplica 432 por  $\frac{1}{3}$ . ¿El resultado es mayor, menor o igual a 432? ¿Por qué?
- Observa las figuras 1 y 2.

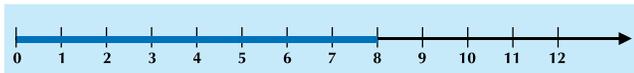


Figura 1

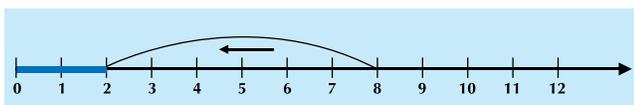


Figura 2

- ¿Qué número representa la barra azul de la figura 1?
- ¿Por cuál fracción multiplicó el número de la barra azul de la figura 1 para obtener como resultado el valor representado en la barra azul de la figura 2?

Representa el resultado del producto correspondiente.

- $20 \times \frac{1}{10}$
- $30 \times \frac{1}{5}$
- $28 \times \frac{1}{7}$

**Diversión matemática**

¿Cuántos quintos de litro de jugo de naranja hay en  $2 \frac{1}{2}$  litros?



**Día a día**

**Parques Nacionales Naturales de Colombia**

El 9 de noviembre se celebra el día de los Parques Nacionales, ya que ese día en 1960 se declaró el Parque Natural Cueva de Los Guácharos, localizado al sur del Huila y tiene una extensión de 9.000 Hectáreas.

En él vive el guácharo, ave que emplea un sistema semejante al radar para circular dentro de cuevas y cavidades. En 1980 la UNESCO lo declaró reserva de la Biosfera.



El Parque Nacional Natural Chiribiquete, localizado entre Guaviare y Caquetá, es el más grande de Colombia con una extensión de 1,280,000 hectáreas. El más pequeño es el Parque Nacional Natural Santuario de Flora Isla de la Corota, ubicado en la Laguna de La Cocha en Nariño, con un área de 16 Ha, aproximadamente.

La extensión del Parque Natural Cueva de Los Guácharos es  $\frac{1}{142}$  de la extensión del Parque Nacional Natural Chiribiquete y el Parque Nacional Natural Santuario de Flora Isla de la Corota es  $\frac{1}{562}$  del Parque Natural Cueva de Los Guácharos.

Informe: <http://www.colombia.travel/es/turista-internacional/actividad/naturaleza/parques-naturales/parques-naturales-de-la-region-andina/parque-natural-cueva-de-los-guacharos>

# Tema 7. Realizo transformaciones con operadores de la forma $\frac{a}{b} x$

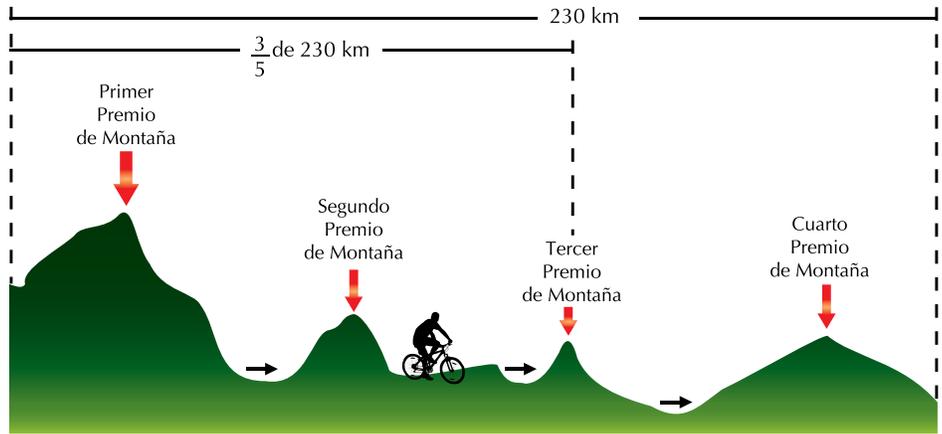


## Indagación

La gráfica muestra la novena etapa de la vuelta a Colombia 2010, que hizo la ruta Bogotá-La Vega-Honda-Mariquita-Líbano, con un recorrido de 230 kilómetros.

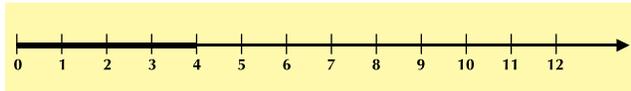
¿Cuántos quintos tiene todo el recorrido?

¿Cuántos kilómetros le falta por recorrer al ciclista desde el tercer premio de montaña situado a  $\frac{3}{5}$  del total?

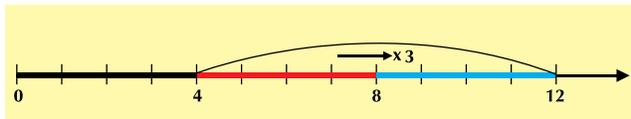


## Conceptualización

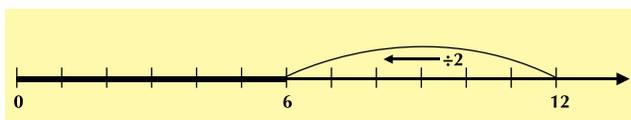
$\frac{3}{2}$  corresponde a la combinación de dos operaciones:



La multiplicación por 3.



Y la división entre 2.



Al multiplicar por 3 una magnitud se triplica y al dividir una magnitud entre 2 reduce a la mitad.

Ejemplo:  $\frac{3}{2} \times 4$

Primero  $4 \times 3 = 12$

Segundo el resultado lo dividimos entre 2.

$12 \div 2 = 6$



### Aplicación

Analiza las dos situaciones primeras que encuentras a continuación y después, en tu cuaderno, resuelve las que siguen explicando tu procedimiento y finalmente compara los resultados con tus compañeros.

- Hubo 550 estudiantes un año y el siguiente año 462. ¿En cuánto por ciento disminuyó el número de estudiantes?
- El precio de un repuesto para la motobomba fue \$23,500 y ahora cuesta \$23,970. ¿Cuánto por ciento subió el precio?
- En un grupo de 24 estudiantes del grado sexto, el profesor de inglés informa que los  $\frac{3}{4}$  del número de estudiantes ha aprobado la previa. ¿Cuántos estudiantes aprobaron la previa? Para resolver el problema responde:
  - ¿Cuántos estudiantes tiene una cuarta parte del grupo? ¿Por qué?
  - ¿Cuántos estudiantes hay en las tres cuartas partes del grupo? ¿Por qué?
- Felipe tenía \$85,000 en su cuenta de ahorros y sacó los  $\frac{4}{5}$  del dinero para comprar repuestos para la bicicleta. ¿Cuánto dinero sacó Felipe?
- Observa las figuras 1, 2 y 3 las cuales representan una cantidad y la aplicación de dos operadores y responde:

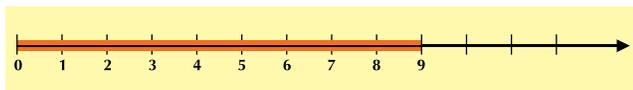


Figura 1

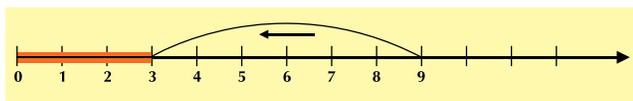


Figura 2

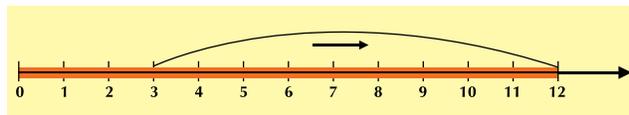


Figura 3

- ¿Qué número se representa en la figura 1?
- ¿Qué fracción se le aplicó al número de la figura 1 para obtener el valor representado en la figura 2?
- ¿Qué fracción se le aplicó al número de la figura 2 para obtener el valor representado en la figura 3?
- Teniendo en cuenta los literales b y c ¿Qué fracción se le aplicó al número de la figura 1 para obtener el valor representado en la figura 3?

Representa en la recta numérica la aplicación de los siguientes fracciones al número dado e indica su resultado.

6.  $25 \times \frac{4}{5}$

7.  $1,210 \times \frac{3}{11}$

8.  $27 \times \frac{2}{3}$

9.  $240 \times \frac{2}{5}$

10.  $320 \times \frac{7}{4}$

### Entendemos por...

**Incremento** El aumento experimentado por una magnitud. Ejemplo: El precio de la gasolina tuvo un incremento de \$200 por galón. Significa que el galón de gasolina subió \$200 sobre el precio que tenía.

**Decremento** la disminución de una magnitud. Ejemplo: Si el curso fue iniciado con 25 estudiantes y 6 meses después solo están en el curso 20, se dice que el decremento fue de 5 estudiantes.

## Diversión matemática

### Diálogo racional

Un agricultor dice:

- Las heladas me estropearon  $3/10$  de la cosecha, la sequía me hizo perder otros  $3/10$  y luego, una vez recogida, la inundación me ha estropeado  $4/10$  de lo que tenía en el almacén.

Por lo tanto  $(3/10 + 3/10 + 4/10 = 10/10)$ , no me queda nada.

Un amigo le contesta: No exageres, has salvado casi la cuarta parte de la cosecha.

Discute con algunos compañeros(as), cuál de los dos tiene razón. Justifica la respuesta.

Texto: <http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarroyo/maticas/materiales/1eso/unidad6.pdf>



## Día a día

### Rama de las Ciencias Naturales

La ornitología es el estudio formal de las aves.

En las universidades se considera una de las ciencias Naturales, se estudia como una rama de la zoología y en algunas es un programa de especialización.

Todas las otras formas de apreciar a las aves en el zoológico, los pajareros, la avicultura, etc. se guían por la ornitología.

Algunos zoológicos del mundo han apartado hasta  $\frac{2}{9}$  de su extensión para el mantenimiento de las aves.

Tomado de: <http://www.google.com.co/imgres?imgurl=http://www.anipedia.net/images/pajaros-fondos-escritorio>



## Este capítulo fue clave porque

- Me enseñó la importancia de las transformaciones numéricas.
- Pude comprender los significados de las fracciones.
- Aclaré las dudas que tenía desde años anteriores sobre la representación de los números fraccionarios.
- Reconocí cómo los fraccionarios están incluidos en muchas actividades del hogar. Los fraccionarios, más ampliamente los Racionales, están en muchas actividades de nuestra vida diaria, como por ejemplo en las recetas de cocina, en nuestras charlas con los amigos, por ejemplo en fútbol cuando decimos hubo un disparo del balón desde media cancha, etc.

## Conectémonos con la Biología

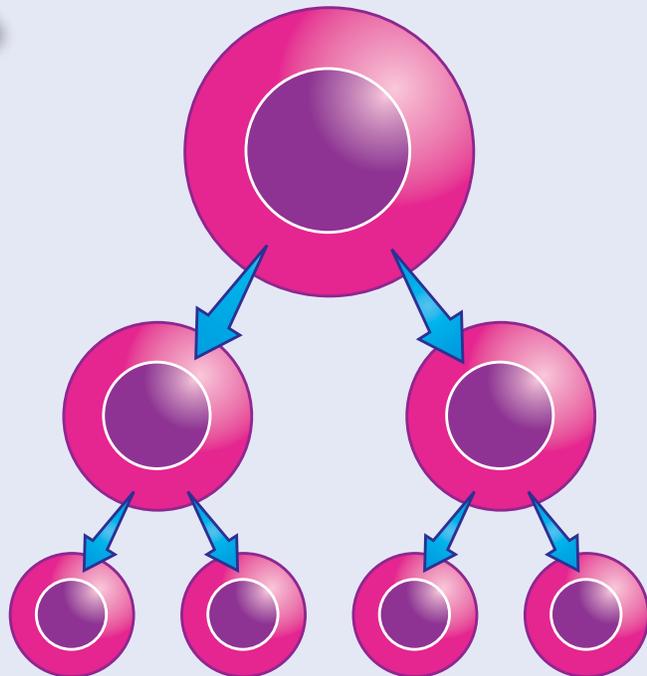


### La división celular

Las bacterias son organismos unicelulares y microscópicos, que carecen de núcleo diferenciado y se reproducen por división celular sencilla.

Cuando las bacterias y otras células alcanzan un tamaño y un metabolismo crítico, se dividen y forman dos células hijas idénticas; cada una de éstas recibe aproximadamente la mitad de la masa celular de la célula original y comienzan a crecer. Si una bacteria se divide en 2 cada 5 minutos, ¿Cuántas bacterias existirán al cabo de  $\frac{1}{2}$  hora (30 minutos)?

Observa el diagrama adjunto y realiza en tu cuaderno el diagrama completo, correspondiente a la situación de la bacteria.



## Repasemos lo visto



El caso de Toñito expuesto al comienzo de la unidad, nos hace reflexionar sobre la importancia y utilidad de los números en la vida de todas las personas.

Contar, numéricamente, es una actividad de presencia continua en el diario vivir del hombre.

Su edad, su estatura, su talla en el vestir, los días trabajados, el dinero ganado y gastado, el tamaño de la vivienda, el número de camas de hogar, la probabilidad de ganarse una rifa, el número de miembros de la familia, los días de clase, el número de estudiantes del curso, son apenas una pequeña muestra del uso que cualquier persona debe hacer del conteo y la agrupación.

Las matemáticas surgieron como una necesidad del hombre de contar sus pertenencias.

La aritmética es uno de los pilares de las matemáticas, que estudia los números, sus relaciones y sus operaciones.

A medida que el tiempo ha transcurrido, las matemáticas han evolucionado y sus aplicaciones han sido cada vez, más diversas. Apoyan el desarrollo del pensamiento, el crecimiento de la civilización y el progreso de otras ciencias para la resolución de problemas.

No olvidemos que:

- Un sistema de numeración es una manera de expresar números y solamente requiere de una serie de símbolos y algunas reglas para combinarlos.
- Los sistemas numéricos más antiguos son el: Egipcio, Azteca, Romano, Babilónico y Maya.
- El Sistema decimal se basa en 10 símbolos llamados dígitos que son: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.
- El valor que tiene una cifra tiene, según su posición en un número, se llama valor posicional o relativo.
- En la fracción como partes de la unidad, el todo se toma como unidad.
- La fracción como cociente es una repartición o división.
- En la fracción como operador se multiplica por el numerador y se divide.
- En la fracción como razón y proporción se comparan dos cantidades de una misma magnitud.
- En la fracción como porcentaje se establece una relación de proporcionalidad entre un número y 100, denominado tanto por ciento, un número y mil llamado tanto por mil o un número y uno conocido como tanto por uno.

# Mundo rural

## El tractor agrícola más grande del mundo

El verdadero rey de los tractores agrícolas está en Estados Unidos.

Es el Big Bud 16V-747, y actualmente trabaja para los hermanos Williams, unos granjeros de Montana (EU) que lo emplean para el arado de su gigantesca explotación agraria.

El Big Bud 16V-747 mide 8.69 metros de largo.

Hasta los enganches de accesorios, 4.27 metros de alto y 6.35 metros de ancho, contando las impresionantes ruedas duales.

No es que sea muy largo, pero tiene que impresionar ver la anchura de un aparato que ocuparía por sí solo casi dos carriles de autopista.

Sólo las ruedas miden casi 2.5 metros de altura, y fueron construidas especialmente para Big Bud por la United Tire Company of Canada. En realidad el tractor también es un ejemplar único, pues fue un encargo especial construido para los hermanos Rossi de Montana, que tenían una granja de algodón y necesitaban algo muy grande para el arado profundo de grandes superficies.

El Big Bud 16V-747 fue producido en 1977 por la Northern Manufacturing Company.

Tras 11 años, Big Bud fue vendido a Willowbrooks Farms, una compañía agrícola de Florida que lo empleó nuevamente para arado profundo. En 1997 volvió a Montana, cuando fue comprado por los citados hermanos Williams, que trabajan a escasos kilómetros de su lugar de fabricación.

El motor que mueve al rey de los tractores es un Detroit Diesel de 16 cilindros en V y dos tiempos. Tiene 24.1 litros de cilindrada y está sobrealimentado por 4 turbocompresores. De fábrica entregaba 730 CV, pero los hermanos Williams han conseguido 900 CV a 1,900 rpm (revoluciones por minuto) gracias a unas cuantas modificaciones.

La velocidad máxima de arado es de 13 km/h, con un arado de casi 30 metros colgado de su parte trasera.

Un acre son 4,048.5 m<sup>2</sup>. Lleva un tanque de gasóleo de 1,000 galones, casi 4,000 litros de petróleo y un peso propio de 50 toneladas.



Texto : <http://www.diariomotor.com/2010/05/04/big-bud-16v-747-el-tractor-agricola>

## Dato curioso



### Cuatro cifras astronómicas

¿Sabías que ...

- El peso estimado de la Tierra es de 6,000,000,000,000,000,000,000,000 de kilos?
- El Sol pesa 2,000,000,000,000,000,000,000,000,000 de kilos?
- Una persona de 70 kilos pesaría sobre la superficie solar 1,400,000,000,000,000,000 de toneladas?
- En todo el mundo, se pueden ver a simple vista cada noche, 100,000,000 millones de estrellas?

Información del planeta Tierra

Diámetro: 12,756 Km

Órbita: 149,600,000 Km

Año: 365 días

Días: 24 horas

Temperatura: 20 Grados Centígrados

Las cifras astronómicas son muy incómodas de manejar, por eso es mejor expresarlas en potencias de 10, que es como se utilizan en los cálculos científicos.

[http://www.todogeologia.com/biblioteca/kb\\_show.php?id=21](http://www.todogeologia.com/biblioteca/kb_show.php?id=21)

Tomado de: <http://www.elmundo.es/elmundo/2011/01/26/ciencia/1296047282.html>

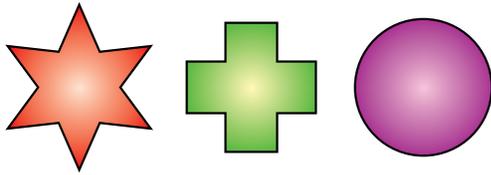
## ¿En qué vamos?



### Reflexiono y trabajo con mis compañeros

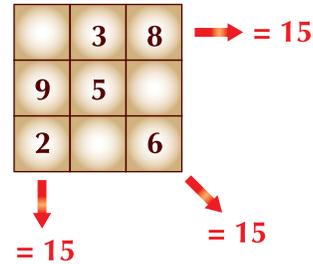
Resuelve cada ejercicio en tu cuaderno y revisa tus repuestas con algunos compañeros.

Dibuja las figuras siguientes:



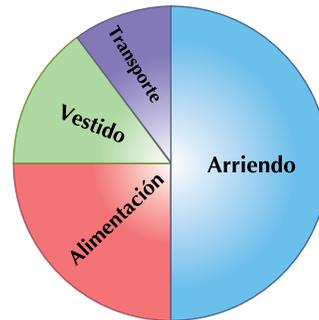
- Ordénalas de maneras diferentes, dibújalas tantas veces como sea posible. Cuenta figuras y concluye:
- De cada forma fueron necesarias \_\_\_\_\_ figuras.
- Con 3 figuras diferentes, puedes hacer \_\_\_\_\_ arreglos y utilizas un total de \_\_\_\_\_ figuras.
- En los nombres AMALIA Y EMILIO existe una curiosidad. Si les quitas las vocales, te queda un número romano. ¿Cuál número será?
- Escribe el año de tu nacimiento, en numeración romana.
- Escribe en numeración romana el año actual.
- Escribe el nombre de la posición decimal de cada dígito del número 9'736,825.
- Inventa un sistema de numeración con símbolos de tu imaginación y equivalencias en el sistema decimal, que funcione de acuerdo a principios y reglas que establezcas.
- Dados los números: 7, 84, 32, 0, 34, 50, 27, 49, 15, 8, organízalos de menor a mayor.

10. Completa el cuadrado mágico, de constante mágica 15



11. Observa la siguiente gráfica correspondiente a la distribución de gastos de una familia y escribe frente a cada porcentaje el concepto para el que fue destinado.

- 15% \_\_\_\_\_
- 25% \_\_\_\_\_
- 50% \_\_\_\_\_
- 10% \_\_\_\_\_



12. Escribe el signo = , < ó > entre cada pareja de Racionales.

- $\frac{1}{2} \square \frac{3}{6}$
- $\frac{2}{7} \square \frac{3}{9}$
- $\frac{10}{4} \square \frac{15}{6}$
- $\frac{3}{5} \square \frac{9}{15}$
- $\frac{3}{8} \square -\frac{3}{8}$
- $-\frac{9}{5} \square \frac{9}{15}$

## Le cuento a mi profesor

Conversa con tu profesor sobre cuánto aprendiste en esta unidad.

Qué sé hacer	Superior	Alto	Básico	Bajo
Aplico los criterios de divisibilidad para hallar múltiplos y divisores de un número natural.	Aplico todos los criterios de divisibilidad posibles para hallar los múltiplos y los divisores de números naturales.	Aplico criterios de divisibilidad para hallar algunos múltiplos y divisores de un número natural.	Aplico algunos criterios de divisibilidad para hallar múltiplos y divisores de un número natural.	No aplico los criterios de divisibilidad para hallar múltiplos y divisores de un número natural.
Aplico las operaciones con los números Naturales en distintas situaciones de la vida diaria.	Aplico todas las operaciones con los números Naturales en las distintas situaciones de la vida diaria.	Aplico algunas operaciones con los números Naturales en las distintas situaciones de la vida diaria.	Aplico algunas operaciones con los números Naturales en algunas situaciones de la vida diaria.	No aplico las operaciones con los números Naturales en las distintas situaciones de la vida diaria.
Expreso en base 2 o sistema binario números escritos en numeración decimal y viceversa.	Dados números en base 2, los expreso en base 10 y dados números en el sistema decimal, los expreso en sistema binario.	Expreso algunos números del sistema decimal en el sistema binario, y números escritos en el sistema binario los expreso en el sistema decimal.	Expreso algunos números del sistema decimal en el sistema binario, y algunos números escritos en el sistema binario los expreso en el sistema decimal.	Se me dificulta expresar muchos números del sistema decimal en sistema binario y del sistema binario en sistema decimal.

## Participo y aprendo

Lee el enunciado y señala con una x la categoría correspondiente, según lo que has aprendido.

Participo y aprendo	Siempre	Casi siempre	A veces	Nunca	¿Qué debo hacer para mejorar?
Participo en clase formulando o respondiendo preguntas.					
Participo activamente en los grupos de trabajo.					
Comparto mis saberes y dudas con mis compañeros.					
Fomento la disciplina dentro del grupo.					
Permito la libre discusión.					
Propongo problemas o actividades para resolver en clase.					
Repaso en casa lo suficiente sobre lo aprendido en el colegio.					

# Mido y Construyo

## Resolvamos

### Te has preguntado:

#### ¿Son importantes las mediciones?

Hemos visto cómo desde la antigüedad, el ser humano ha realizado mediciones sobre la Tierra. De ahí surgió el nombre de Geometría, palabra compuesta por dos raíces griegas: geo = Tierra y metría = medida.

En la vida diaria, constantemente se hacen mediciones, por ejemplo: medimos el tiempo que tomamos en trasladarnos de un lugar a otro, medimos la extensión de un terreno que se compra, etc. Las mediciones son importantes en la vida cotidiana, en el estudio, en el trabajo y en los experimentos, cuyos datos nos permiten reunir información para después organizarla y obtener conclusiones.

Si utilizamos diferentes objetos para medir, los resultados serán también diferentes y en nuestras mediciones habrá errores, dependiendo del objeto empleado. Hoy se utilizan patrones de medida que son acuerdos internacionales para medir y obtener simi-

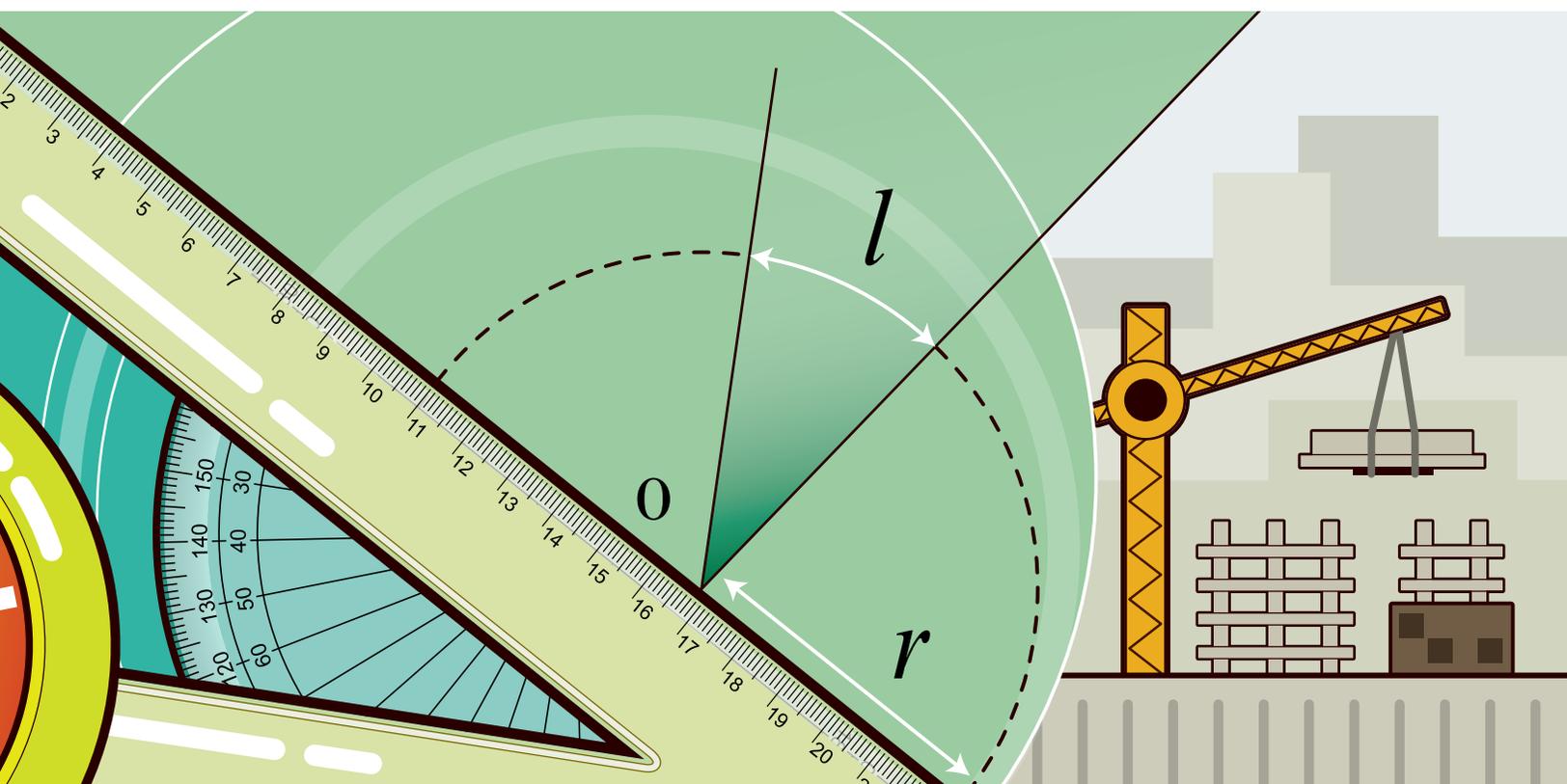
lares resultados, aunque siempre puede haber errores por la forma como se mida y quien lo hace.

Las mediciones son muy importantes en las ciencias y a lo largo de la historia figuran personajes que dedicaron su vida a la investigación científica e hicieron grandes aportes. Uno de ellos fue Galileo Galilei, nacido en la ciudad de Pisa, Italia, el 15 de febrero de 1564. Galileo creó el método experimental estudiando la medición del tiempo, el movimiento, la flotación de los cuerpos y la naturaleza del calor.

En esta unidad tendrás la oportunidad de manejar instrumentos y realizar construcciones y cálculos en actividades de tipo geométrico. En la vida diaria estamos continuamente utilizando mediciones. ¿Te imaginas una casa construida sin medidas? ¿Sin un plano? ¿Sin un cálculo de costos? Piensa en otras cosas o actividades humanas en las cuales es necesario medir.



Referentes de calidad	Capítulos
<b>Estándares</b>	
Identifico características de localización de objetos en sistemas de representación cartesiana y geográfica.	1. Trabajo en el espacio con localizaciones, transformaciones formas y figuras. 2. Realizo mediciones y cálculos.
Predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciones) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte.	
Calculo perímetros y áreas a través de composición y descomposición de figuras y cuerpos.	
Resuelvo y formulo problemas usando modelos geométricos.	
Resuelvo y formulo problemas que requieren técnicas de estimación.	
Resuelvo y formulo problemas que involucren factores escalares (diseño de maquetas, mapas).	



# Trabajo en el espacio con localizaciones, transformaciones formas y figuras

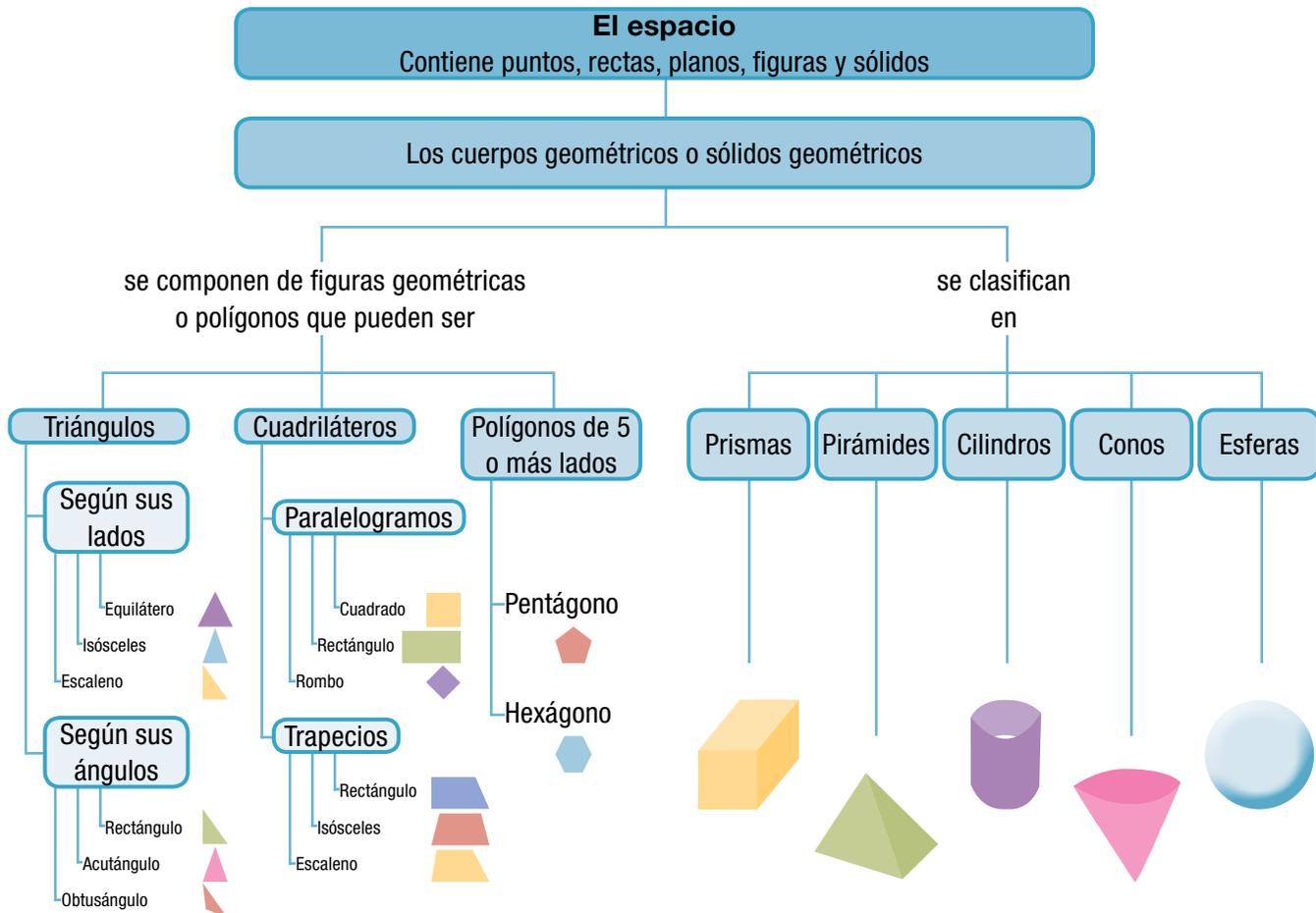
Se cree que la geometría tuvo su origen en Egipto, un país del continente africano, atravesado por un importante y caudaloso río llamado Río Nilo.

En invierno el río se desbordaba, cambiaba su cauce o camino y se borraban los límites de los terrenos que la población tenía demarcados. Esto hizo que los egipcios idearan métodos geométricos que les permitiera tener en sus tierras, unos límites estables.

De los métodos del cálculo egipcio y su aplicación en distintos problemas existen inscripciones en piedras talladas y en algunos papiros que según los hallazgos y los estudios realizados, datan desde los tiempos de Ramsés II hacia el año 1300 antes de Cristo.

Gracias a la Geometría se puede estudiar la forma, tamaño y posición de la figuras, conocer más nuestro entorno, ya que cada cosa u objeto que existe en la naturaleza puede ser asociada con una forma geométrica, realizarle mediciones, hacer cálculos y poner en juego la imaginación para graficar, hacer transformaciones y hasta divertirse.

En esta unidad tendrás la oportunidad de aprender nuevo vocabulario, propio de la Geometría, conocerás los sistemas geométricos y de medidas, mediante construcciones, mediciones y cálculos de longitudes, áreas, masas y tiempos.



# Tema 1. Conceptos básicos de Geometría y manejo instrumentos geométricos



## Indagación Geometría en pareja

En pareja, juega a unir puntos y formar cuadrados.

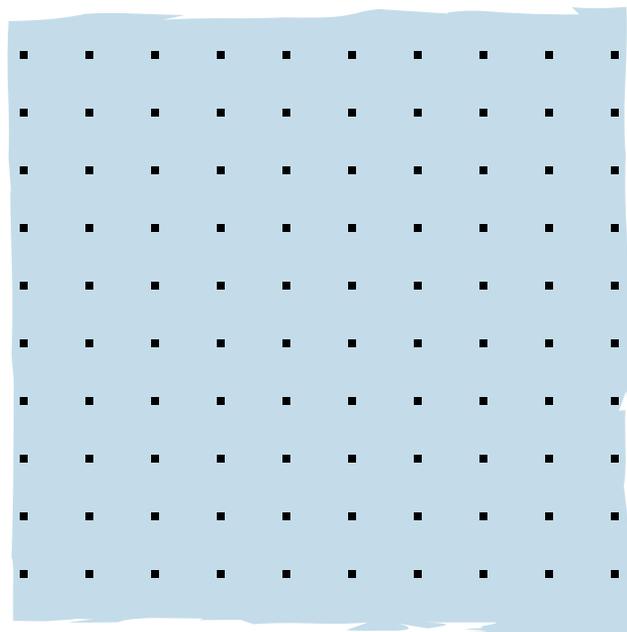
Copia en tu cuaderno el conjunto de puntos de la figura de la derecha y con un compañero juega al que más cuadrados complete, uniendo cada vez dos puntos.

Las marcas de los cuadrados son los símbolos O y X.

Cada uno escoja un símbolo y en cada turno una dos puntos.

Cuando alguno de los jugadores una dos puntos y forme un cuadrado, escriba en él el símbolo escogido y si a continuación falta un lado de otro cuadrado, el mismo jugador lo completa y sigue hasta cuando ya no haya más cuadrados que formar con una línea faltante. Al final gana el jugador que más cuadrados haya obtenido.

¿Cuántos cuadrados lograste obtener? ¿Cuántos cuadrados obtuvo tu compañero? y ¿Quién ganó?



## Conceptualización

En geometría, hay algunos términos que no pueden definirse. Son ideas formadas en nuestra mente a través de la observación del entorno y solamente podemos hacer representaciones de ellas. A estas ideas las llamaremos términos primarios o términos básicos de la geometría.

Algunos de ellos son: punto, recta, plano y espacio. Aunque estos términos no están matemáticamente definidos, podemos obtener una descripción de ellos, tomando ejemplos de nuestra cotidianidad en el aula de clase, en nuestra casa y en el ambiente donde permanecemos. Así, adquirimos la idea intuitiva de punto, observando la marca dejada por la punta de un lápiz, un alfiler, una tachuela o una inyección.

El dibujo representativo de un punto será siempre aproximado, pues la marca tendrá algún tamaño o área, mientras que un punto siempre carece de área y se usa para indicar una posición en una recta, un plano y el espacio.

La Fig.1 presenta ejemplos que dan la idea de un punto:

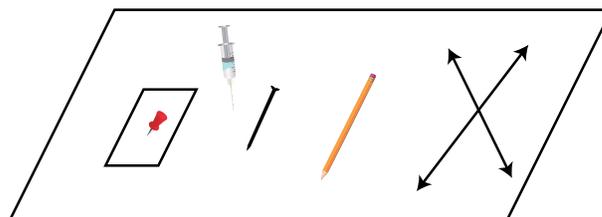


Figura 1

Una tachuela o chinche pinchando un papel en la cartelera, el orificio mínimo que deja la aguja cuando se aplica una inyección, la huella de un

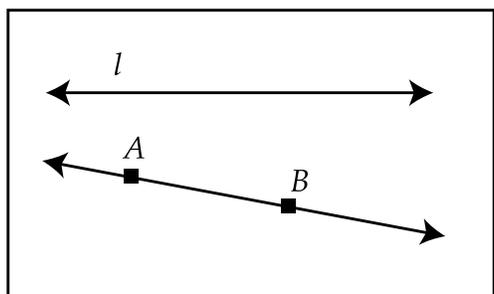


Figura 2

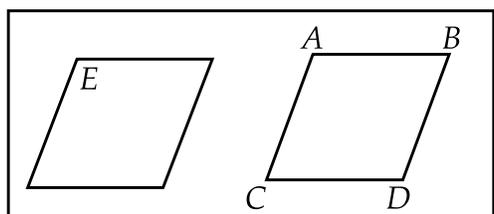


Figura 3

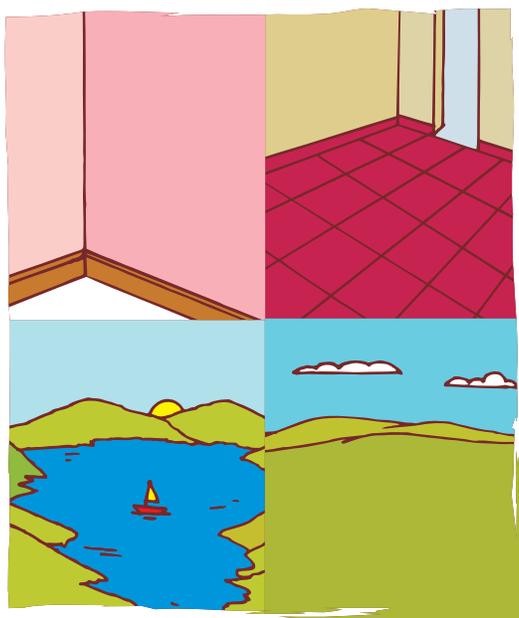


Figura 4

lápiz sobre una superficie, la punta de un alfiler, dos rectas que se cruzan.

Se debe tener presente que el punto, como figura geométrica u objeto no tiene dimensiones, es decir, el punto no tiene tamaño, ni largo, ni ancho, ni espesor, ni profundidad.

Sin embargo, una sucesión infinita de puntos en una misma dirección, nos da idea de recta. Como la recta es infinita no puedes dibujarla totalmente en una hoja de cuaderno por lo que la representas con una flecha de dos cabezas. Las rectas se nombran con una letra minúscula del español o con dos letras mayúsculas en dos puntos de ella. Ver Fig.2.

Un *plano* se compone de infinitos *puntos* e infinitas *rectas*. Un *plano* se caracteriza porque no tiene grosor y se extiende indefinidamente en todas las direcciones.

Como representación de un plano, algunas veces utilizamos un cuadrilátero que es una figura geométrica de 4 lados y 4 ángulos.

El plano se nombra con una letra mayúscula por dentro del cuadrilátero o con letras mayúsculas en los vértices. Ver en la Fig. 3.

Las ilustraciones de la Fig. 4, nos dan idea de plano:

1. La pared de una alcoba.
2. El piso de un salón, alcoba, sala, etc.
3. La superficie de una laguna.
4. Una llanura.

En el espacio hay *puntos*, *rectas*, *planos*, *figuras* y *cuerpos*. Con las ideas básicas o fundamentales de geometría, es posible realizar construcciones, que son indispensables para la comprensión y ejercitación del trabajo geométrico, para ello es necesario familiarizarnos con los instrumentos geométricos.

### Instrumentos geométricos

El lápiz, la regla, las escuadras, el transportador y el compás son los instrumentos básicos del dibujo.

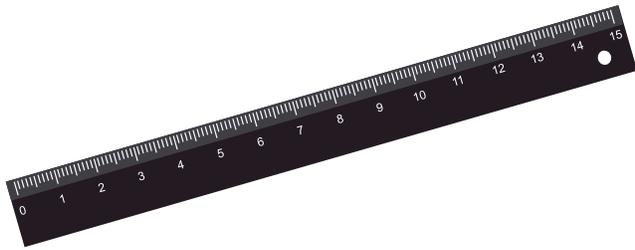
#### Lápiz

Los lápices con los que se escriben notas y se realizan trazos geométricos son duros y pertenecen a la serie H, mientras que los lápices suaves o de la serie B se emplean en el dibujo artístico. Es recomendable realizar las construcciones o dibujos a lápiz y tener a mano borrador y tajalápiz o sacapuntas.



### Regla

La regla es una barra, generalmente de acrílico transparente, metal o madera.

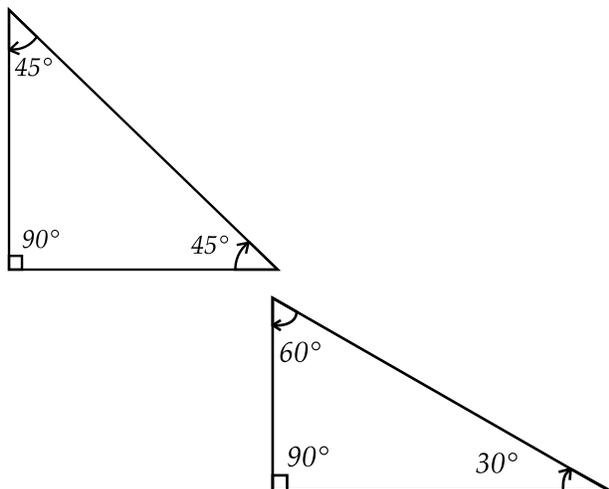


Las reglas están graduadas en el canto o borde superior, cuyo grosor por lo general está adelgazado. Con la regla trazamos segmentos o trozos de recta que pasan por un punto o que unen dos puntos.

Otros usos cotidianos de la regla son: el trazado de márgenes, los subrayados y la medición de longitudes.

### Escuadras

El juego de escuadras consta de dos instrumentos de acrílico, madera o metal en forma de triángulo rectángulo (por tener un ángulo recto o de  $90^\circ$ ), pueden estar o no graduadas. Las escuadras se utilizan para trazar rectas horizontales, verticales, paralelas, perpendiculares e inclinadas.



La escuadra isósceles o de  $45^\circ$  tiene dos lados iguales y sus ángulos miden  $45^\circ$ ,  $90^\circ$  y  $45^\circ$ .

La escuadra escalena o de  $30^\circ$  y  $60^\circ$  tiene sus tres lados de diferentes medidas y sus ángulos miden  $30^\circ$ ,  $60^\circ$  y  $90^\circ$ .

### Trazado de líneas

Existen dos tipos de líneas: las rectas y las curvas. Ver Fig. 5.

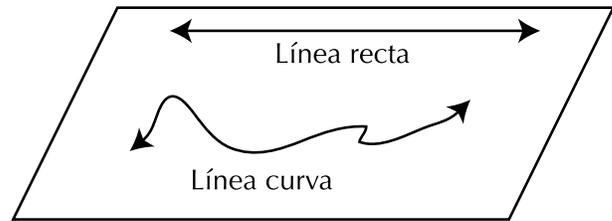


Figura 5

Las líneas rectas se trazan con la regla o escuadras y generalmente, se trazan de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo. Cuando se trabaja con dos instrumentos, como la regla y una escuadra, o con las dos escuadras, hay un instrumento que permanece fijo y otro que es móvil. Para el trazado de línea es indispensable dar a los instrumentos geométricos varios puntos de apoyo, para que no se muevan.

Con los dedos se proporcionan los apoyos y dependiendo de cómo y cuántos se colocan, se logrará menor o mayor estabilidad, los dedos centrales dan movilidad a la escuadra. Con la práctica se evitará que los dedos interfieran en el trazado de una línea.

### Posiciones relativas de dos rectas

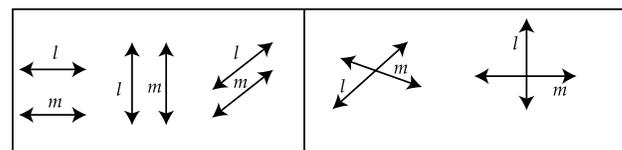


Figura 6

Dadas dos rectas  $l$  y  $m$ , en el plano, éstas pueden tener las posiciones relativas que muestra la Fig. 6.

### Paralelas

Dos o más rectas paralelas no se cortan, por más que se prolonguen. Las rectas paralelas no tienen puntos en común y si los tienen, son la misma recta.

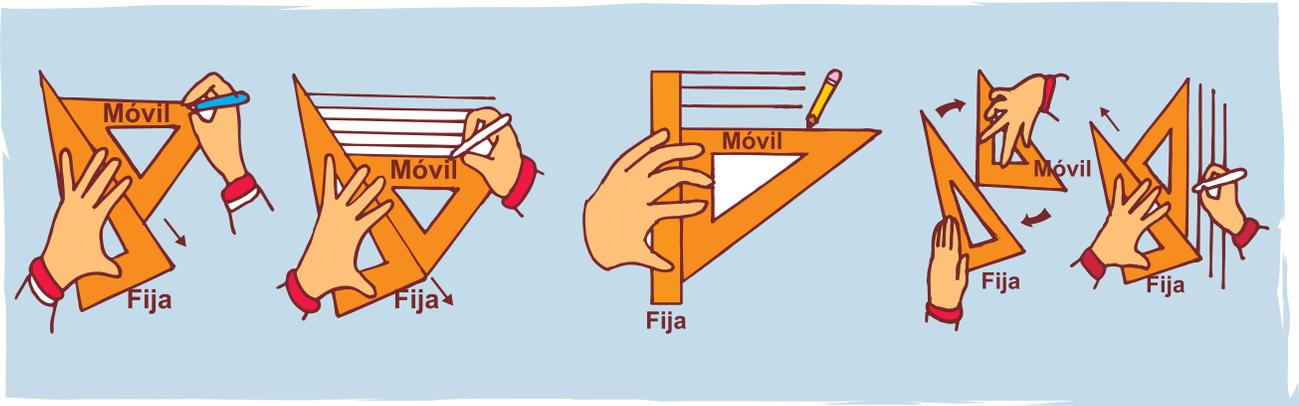


Figura 7

Figura 8

Figura 9

La Figura 7 muestra el trazo de segmentos de recta paralelos horizontales, con dos escuadras.

La Figura 8 muestra el trazo de segmentos de recta paralelos horizontales (de izquierda a derecha) con regla y escuadra y la Figura 9 muestra el trazo de segmentos de recta paralelos de arriba hacia abajo con dos escuadras. En los tres casos, la escuadra móvil se va deslizando sobre un lado de la escuadra o de la regla que están fijas.

El símbolo de paralelismo es  $\parallel$ . Así, si las rectas  $l$  y  $m$  son paralelas, escribiremos simbólicamente:  $\vec{l} \parallel \vec{m}$  y se lee: "la recta  $l$  es paralela a la recta  $m$ " ó las rectas  $l$  y  $m$  son paralelas.

Como caso particular de rectas paralelas, se dice que dos rectas son coincidentes, si son la misma recta.

### Perpendiculares

Si al cortarse dos rectas forman cuatro ángulos iguales, se dice que estas dos rectas son **perpendiculares** y cada uno de los ángulos formados mide  $90^\circ$ , es decir son ángulos rectos. Ver figura 10.

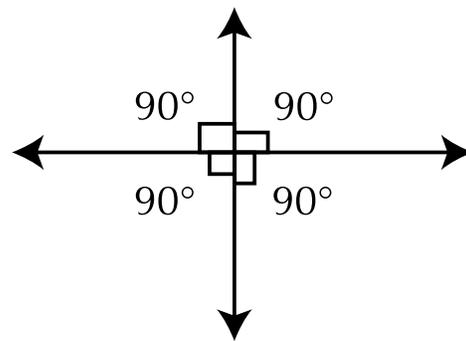


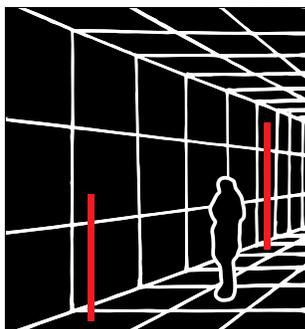
Figura 10

### Rectas intersecantes

Rectas intersecantes o secantes son las rectas que se cortan.

Dos rectas intersecantes tienen un punto en común. Dos rectas perpendiculares son un caso especial de rectas intersecantes.

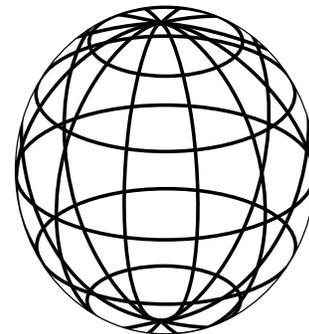
Los dibujos A,B y C muestran rectas paralelas y perpendiculares, identifica en cada uno de los dibujos cuáles rectas son las paralelas y cuáles son las perpendiculares. ¿Por qué?



A



B



C

## Rotación

Con una hoja de papel, un palillo y un lápiz, realiza la siguiente actividad:

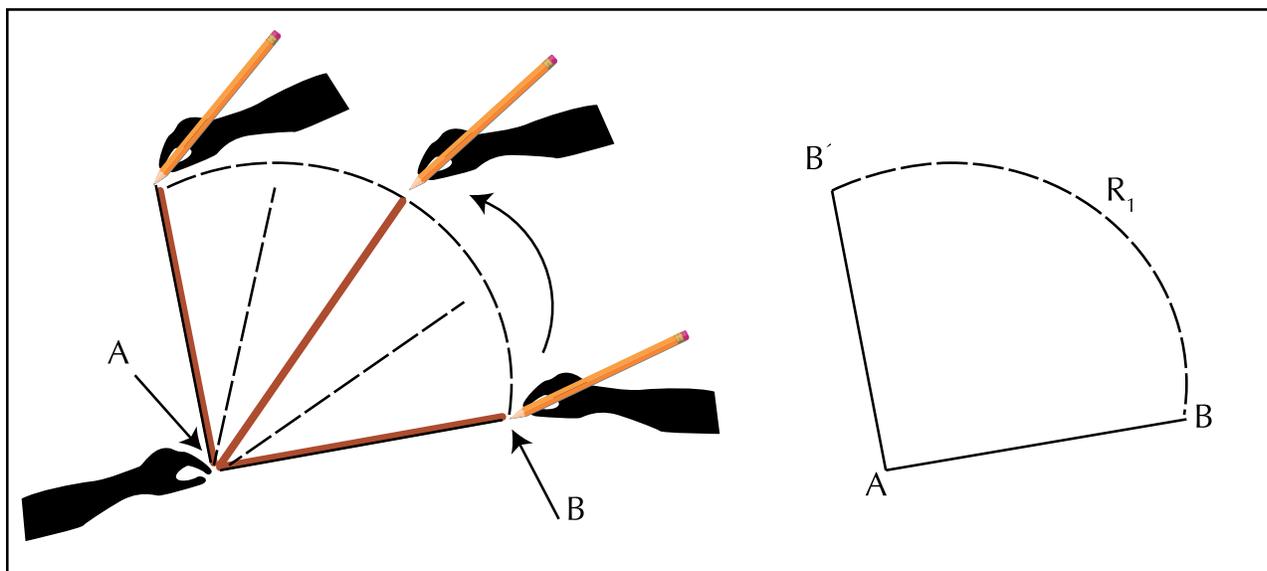


Figura 11

Dibuja un segmento  $\overline{AB}$  del tamaño del palillo. Con una mano fija el palillo por un extremo, (marca en el papel el extremo del palillo con un punto A).

Con la otra mano y con el lápiz marca el segmento desde A hasta el punto B aplica un giro en el sentido contrario a las manecillas del reloj (a medida que haces el giro marca la huella con un lápiz), hasta obtener  $\overline{AB'}$ , perpendicular a  $\overline{AB}$ .

En la Figura 11 encontrarás un dibujo que muestra la rotación.

- La rotación realizada es  $R_1$ .
- El centro de rotación es el punto fijo A.
- El sentido del giro que se realiza es contrario al movimiento de las manecillas del reloj.
- El segmento inicial es:  $\overline{AB}$ .
- El segmento final es:  $\overline{AB'}$ .
- ¿Cuál es la amplitud o fracción del giro de la rotación?

Realiza en tu cuaderno otra rotación  $R_2$  con el palillo, de tal forma que el giro alcance una amplitud de  $\frac{3}{4}$  de vuelta en el sentido opuesto al movimiento de las manecillas del reloj.

¿A cuántos grados equivale la amplitud de cada una de las siguientes rotaciones?

- Media vuelta.
- Un tercio de vuelta.
- Un cuarto de vuelta.
- Un sexto de vuelta.
- Un octavo de vuelta.

Discútelo con tus compañeros.

## Ángulo

La Figura 12 muestra: Una semi-recta  $\overline{OR}$  cuyo centro de rotación es el punto O, una fracción de giro menor de  $90^\circ$  en sentido contrario a las manecillas del reloj y una semi-recta imagen  $\overline{OR'}$ .

Región exterior del ángulo

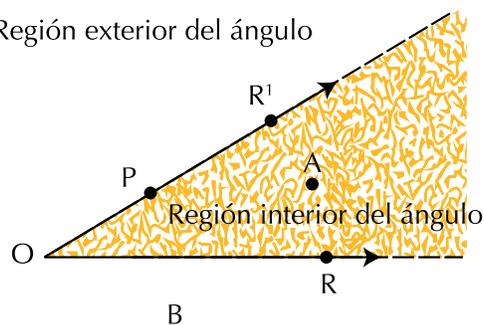


Figura 12

Observa y responde:

- ¿Las semi-rectas  $\overrightarrow{OR}$  y  $\overrightarrow{OR'}$  tienen algún punto en común? ¿Cuál? ¿Cuáles?
- ¿En cuál de las semi-rectas está ubicado el punto P?
- ¿En qué región del plano está ubicado el punto A?
- ¿En qué región del plano está ubicado el punto B?

La figura formada por dos semi-rectas que tienen un origen en común es considerada como ángulo.

Un ángulo puede formarse por la región comprendida entre dos líneas que se cortan en un punto común llamado vértice. En un ángulo podemos distinguir una región interior y una región exterior a él, como muestra la figura 12. En la intersección de dos semiplanos también hay un ángulo.

### Intersección de dos rectas

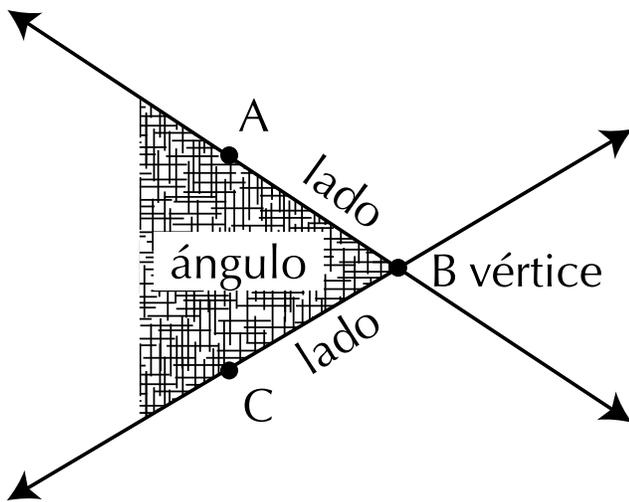
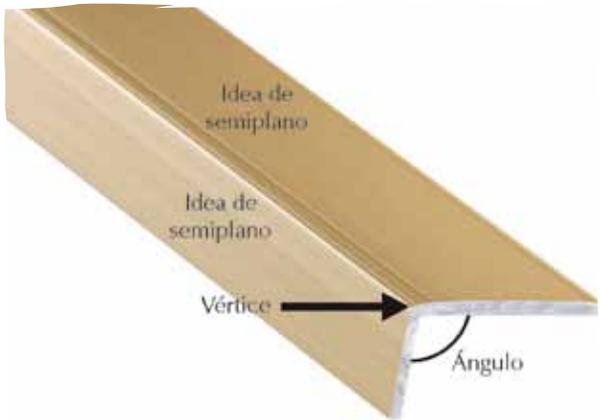


Figura 13

Los símbolos  $\angle$   $\sphericalangle$   $\sphericalangle$  significan ángulo. Puede usarse cualquiera de ellos para nombrarlo.

Un ángulo se nombra con tres puntos. Así, el ángulo de vértice O y de lados los rayos que parten de O y pasan por los puntos P y R, se nombra:  $\overrightarrow{OP}$  y  $\overrightarrow{OR}$ , "el **ángulo POR**". Simbólicamente se escribe:  $\angle POR$  o  $\sphericalangle POR$ .

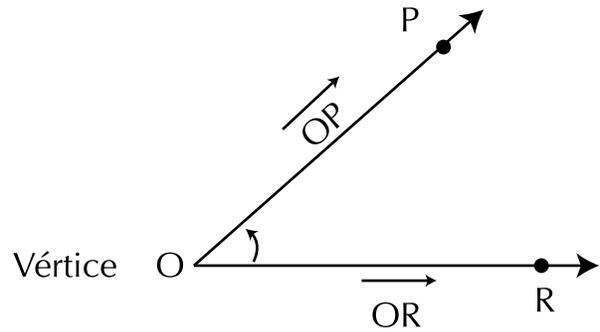


Figura 14

### Transportador

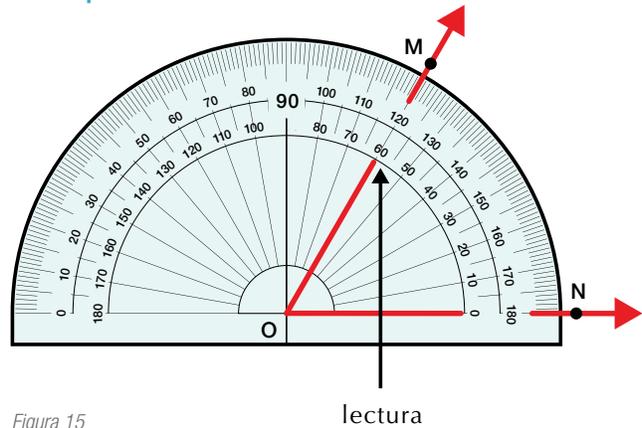


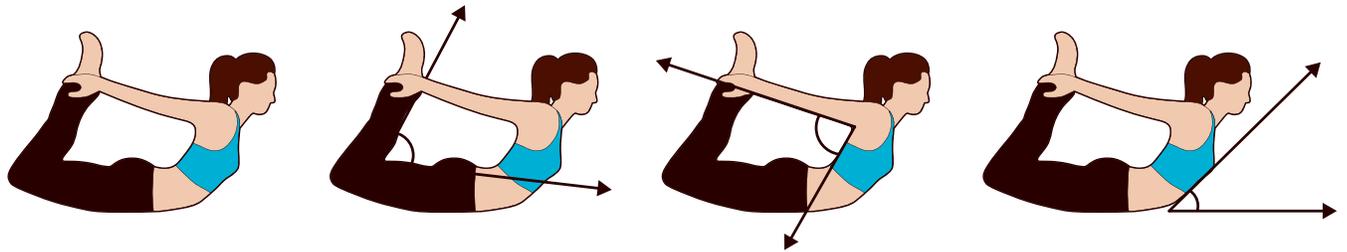
Figura 15

El transportador es una herramienta de dibujo que nos permite medir y construir ángulos de cualquier medida. Consiste en un semicírculo que está graduado desde  $0^\circ$  (0 grados) hasta  $180^\circ$  (180 grados) o  $360^\circ$  (360 grados) con subdivisiones de  $10^\circ$  en  $10^\circ$  y de  $1^\circ$  en  $1^\circ$ .

El dibujo muestra la forma de ubicar el transportador para tomar la medida del  $\angle MON$ . Observe que la lectura de los grados se hace por la escala interior del transportador, en sentido contrario a las manecillas del reloj y el vértice del ángulo coincide con el centro del semi-círculo del transportador.

La medida  $\angle MON = 60^\circ$ .

En una fotografía tomada a una gimnasta, se muestran diferentes ángulos. ¿Cuánto mide cada ángulo indicado en la imagen?



### Compás

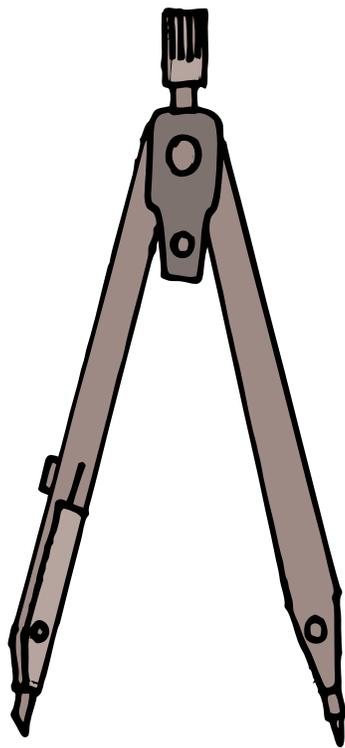


Figura 16

Un compás es un instrumento de dibujo, formado por dos “patas” unidas por una bisagra, cuya apertura puede regularse fácilmente. Generalmente, una pata tiene una punta de acero, aguja o chuzo y la otra pata tiene una mina o un porta lápiz.

En el extremo superior tiene un pequeño cilindro acanalado, para poder sujetarlo con dos dedos y facilitar el movimiento de giro.

El compás se utiliza para:

- a. **Construir circunferencias o arcos de circunferencia.**

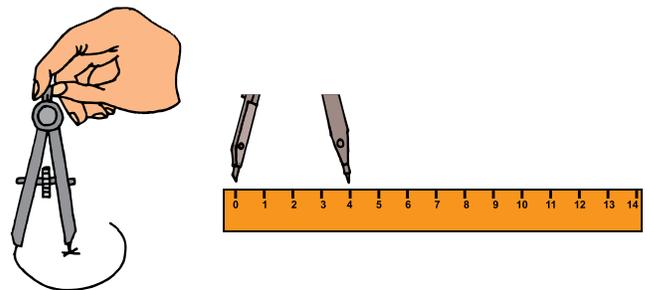


Figura 17

- b. **Transportar medidas de un segmento de recta o de un arco.**

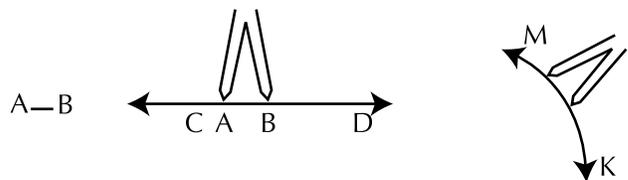


Figura 18



## Aplicación

Copia en tu cuaderno las actividades siguientes y compara tu trabajo con el de algunos compañeros.

1. Construye con lápiz y compás en una cartulina margaritas de diferentes tamaños con los pasos siguientes, coloréalas y crea decoraciones con ellas. Recuerda que todas las construcciones las haces en tu cuaderno.

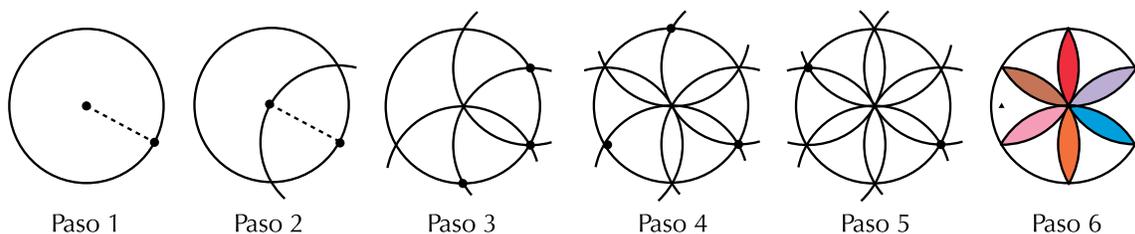
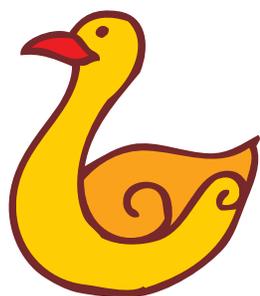


Figura 19

2. La geometría puede ser un medio de entretenimiento y hacer parte del arte. A través de la geometría el ser humano puede expresar sus sentimientos artísticos y representar objetos de la naturaleza. Así puede realizar dibujos en diseños libres o en diseños geométricos. Un dibujo es la representación de un objeto o cuerpo, en el plano. Para su realización se requieren, en algunos casos, conocimientos respecto a la forma y al manejo de los instrumentos de dibujo.

### Diseño Libre



### Diseño Geométrico

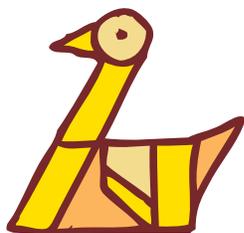


Figura 20

Podemos indicar la representación gráfica del medio que le rodea o de aquello que nos imaginamos en forma libre, copiando formas y colores que la naturaleza nos ofrece, esto propicia el desarrollo de la imaginación, la creatividad y el desarrollo de habilidades y destrezas manuales.

Cuando ya se emplean los instrumentos de dibujo, como regla, escuadras, transportador o compás se geometrizan las formas de cuerpos y objetos. En la Fig. 20 puedes observar la diferencia entre un diseño libre y un diseño geométrico.

3. La medición de ángulos en topografía y astronomía requiere de subdivisiones menores de grado. El sistema de medición es el sexagesimal, éste sistema de numeración posicional emplea la base sesenta; es usado para medir tiempos (segundos, minutos y horas) y ángulos (segundos, minutos y grados).

Al dividir un grado en sesenta partes, cada una de estas partes es un minuto (1') y al dividir cada minuto en 60 partes, cada una de estas partes es un segundo (1'').

En general,  $1^\circ = 60'$   $1' = 60''$  ¿Cuántos segundos tiene un minuto? La expresión decimal  $40.5^\circ$  se puede escribir en unidades pequeñas.

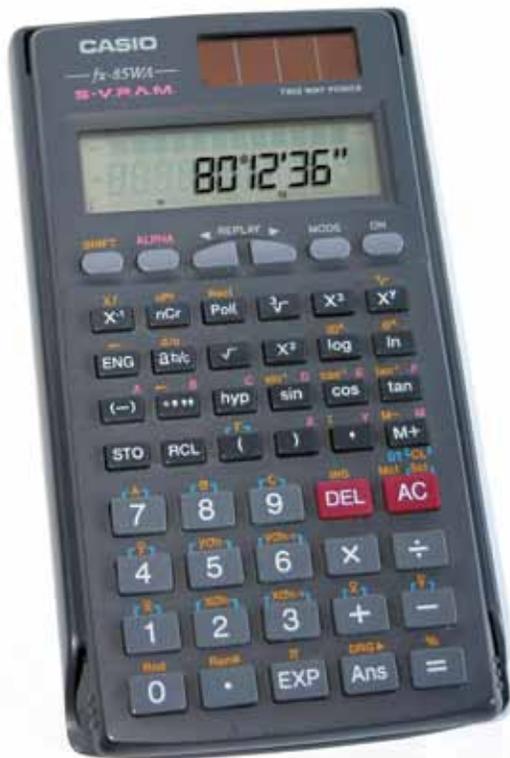
Como  $40.5^\circ = 40^\circ + 0.5^\circ$ , entonces se encuentra la equivalencia en minutos de  $0.5^\circ$ , formando la proporción:

$$\frac{?}{0.5^\circ} = \frac{60'}{1^\circ} \rightarrow ? = \frac{60' \times 0.5^\circ}{1^\circ} = 30'$$

Entonces la expresión  $40.5^\circ = 40^\circ 30'$ .

¿A qué equivale en grados y minutos la expresión  $60.25^\circ$ ?

Para convertir expresiones decimales de ángulos en la calculadora, si la tienes, se procede de la forma siguiente: Se digita la expresión decimal de la medida del ángulo, por ejemplo  $80.21^\circ$ .



Se digitan las teclas  $(-)$   $(\dots)$ . Entonces aparecerá en la pantalla.

Luego  $80.21^\circ = 80^\circ 12' 36''$ .

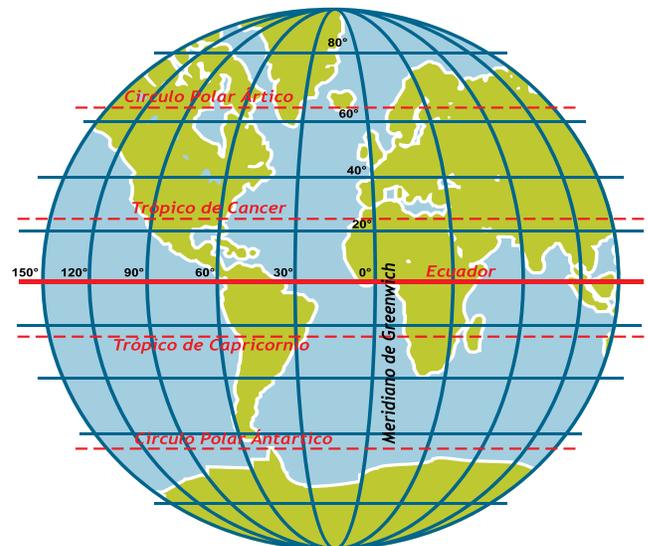
4. Convierte los grados a minutos y a segundos:

- a.  $15^\circ$
- b.  $45^\circ$
- c.  $90^\circ$ .

5. Convierte a grados, minutos y segundos las expresiones:

- a.  $10.28^\circ$
- b.  $62.153^\circ$
- c.  $85.12^\circ$ .

## 6. Coordenadas geográficas



Cualquier punto sobre la superficie de la tierra tiene dos referencias para ser ubicados, la latitud y la longitud geográficas.

### Latitud geográfica (Norte y Sur)

Es el ángulo que forma la vertical del lugar con la línea ecuatorial, de  $0^\circ$  a  $90^\circ$  hacia el Norte, y de  $0^\circ$  a  $90^\circ$  hacia el Sur.

Así, por ejemplo:

El Polo norte está a  $90^\circ$  latitud norte, y el polo Sur está a  $90^\circ$  latitud Sur. Cualquier punto del círculo ecuatorial de la Tierra está a latitud  $0^\circ$ .

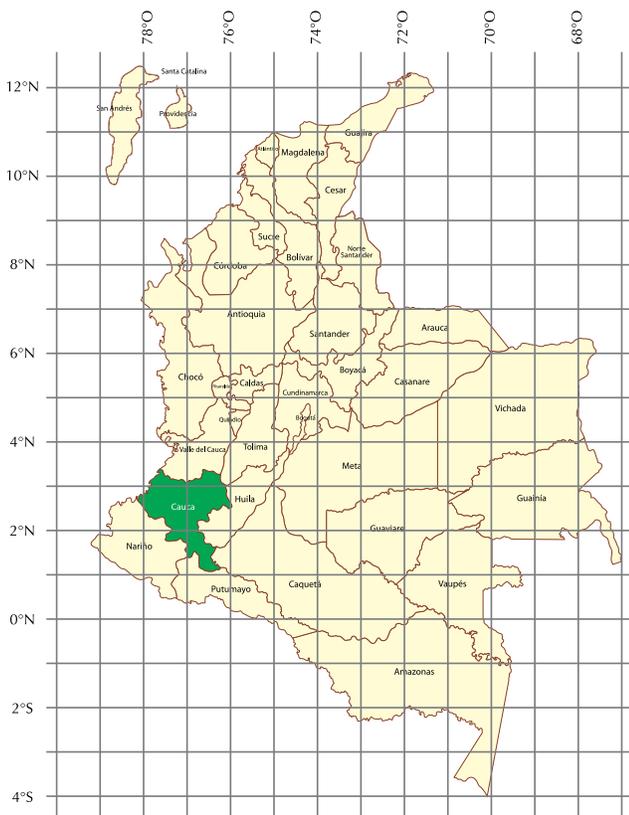
### Longitud geográfica (Este y Oeste)

Es el ángulo que forma el meridiano de Greenwich con el meridiano del lugar, de  $0^\circ$  a  $180^\circ$  hacia el Este, y de  $0^\circ$  a  $180^\circ$  hacia el Oeste.

Así, por ejemplo:

La ciudad de Greenwich y todos los puntos del semi-meridiano que va desde el polo norte-Greenwich-polo sur, tienen longitud 0. Los puntos del semi meridiano restante tienen longitud 180° (Este u Oeste, indiferentemente).

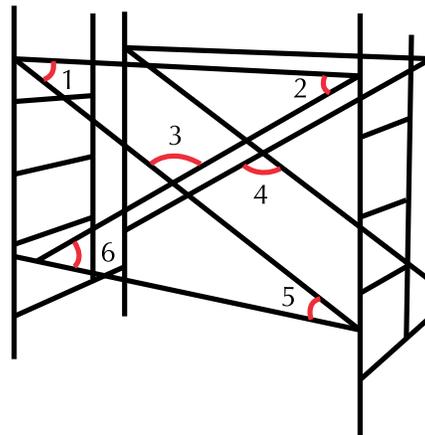
El punto intersección del meridiano de Greenwich con el círculo ecuatorial tiene coordenadas: Latitud 0°, Longitud 0°; y su antípoda es el punto de coordenadas: Latitud 0°, Longitud 180°.



El Departamento de Cauca está situado en el suroeste del país entre las regiones andina y pacífica; localizado entre los  $00^{\circ}58'54''$  y  $03^{\circ}19'04''$  de latitud norte y los  $75^{\circ}47'36''$  y  $77^{\circ}57'05''$  de longitud oeste.

7. En tu cuaderno, escribe la ubicación (longitud y latitud) de tu departamento y la ciudad o región donde vives.

8. Dada la figura:



- Marca con un lápiz de color azul un par de rectas paralelas.
- Marca con un lápiz de color amarillo un par de rectas perpendiculares.
- Con el transportador mide los ángulos marcados con los números 1, 2, 3, 4, 5, y 6.

9. Expresa:

- 3 horas en minutos.
- 2 horas y 8 minutos en segundos.
- 58 minutos en segundos.

10. Dado el segmento,



traza un segmento perpendicular en uno de sus puntos y otro paralelo a él.

### Entendemos por...

**Observar:** mirar con detenimiento.

En la observación intervienen los sentidos. Es muy importante observar para captar detalles necesarios en las construcciones geométricas.

**Descripción:** explicación detallada y ordenada, de acciones, objetos, personas, lugares, etc. En geometría, es frecuente la descripción de cuerpos o de figuras, para una mejor comprensión.

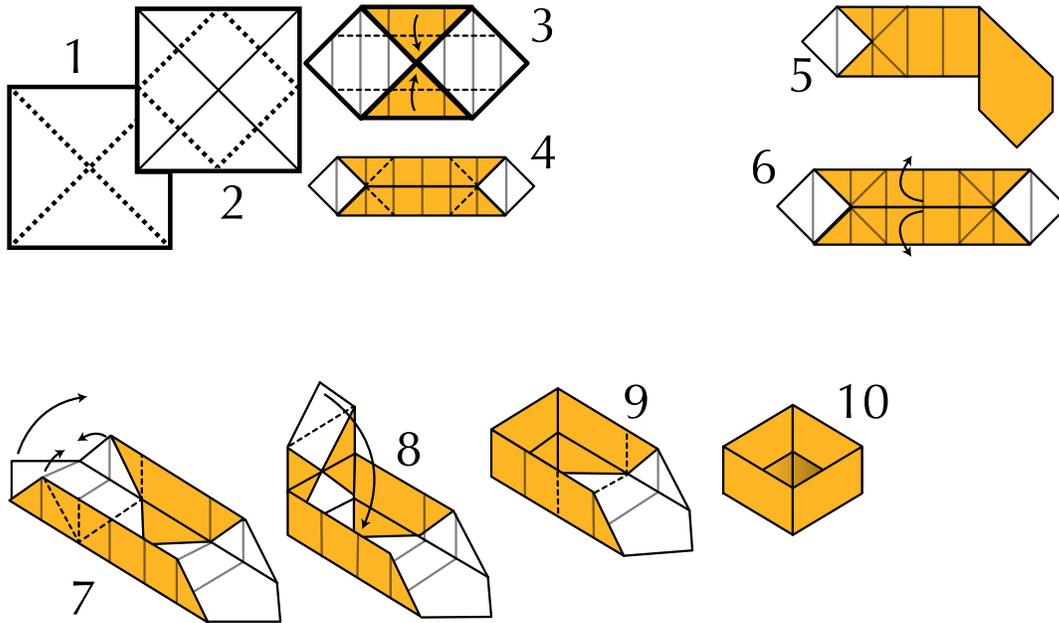
## Diversión matemática

### Cajita de papel

Sigue la secuencia y ármala.

Solo necesitas una hoja cuadrada de papel, del tamaño que quieras.

Haz los dobleces por las paralelas y perpendiculares marcadas en la hoja.



## Día a día

### La nueva labranza

Para sembrar la tierra, hay que trabajarla y en el campo, el buey ha sido el mejor aliado del hombre.

En los últimos años muchos agricultores han dejado los métodos tradicionales de labranza.

El moderno trabajo de ingeniería les ha provisto de nuevas máquinas que han hecho abreviar muchas operaciones de la labranza.

En muchos casos la eliminación de las malezas se hace con herbicidas y para la siembra se remueve solo una pequeña franja en donde se deposita la semilla.

Como norma general, surcos entre 20 cm y 25 cm, paralelamente, son suficientes para cultivos de raíz, y entre 15 cm y 20 cm para la mayoría de los cultivos.

Texto tomado de: [http://curza.uncoma.edu.ar/academica/archivos/Apunte\\_de\\_maquinarias\\_fotos.pdf](http://curza.uncoma.edu.ar/academica/archivos/Apunte_de_maquinarias_fotos.pdf)



## Tema 2. Ubico objetos en el espacio y modelo sólidos



### Indagación

Pensemos en la diferencia que hay entre situar un objeto en el plano y situar un objeto en el espacio. Una hoja de papel o un pedazo de cartulina, nos da la idea de plano y una caja de cartón nos da la idea de espacio.

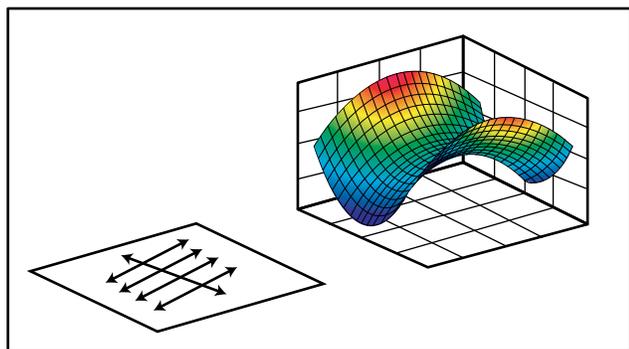


Figura 21

La Figura 21 muestra un ejemplo de la diferencia que hay entre ubicar objetos en el plano y ubicar objetos en el espacio. Compara tus opiniones con las de algunos compañeros y coméntalas. Averigua, por ejemplo, cómo se llaman las dimensiones que se usan en el plano y cuáles son las dimensiones en el espacio tridimensional.



### Conceptualización

El Organizador gráfico de la página 98 te muestra la composición y clasificación de los cuerpos geométricos, llamados también sólidos geométricos.

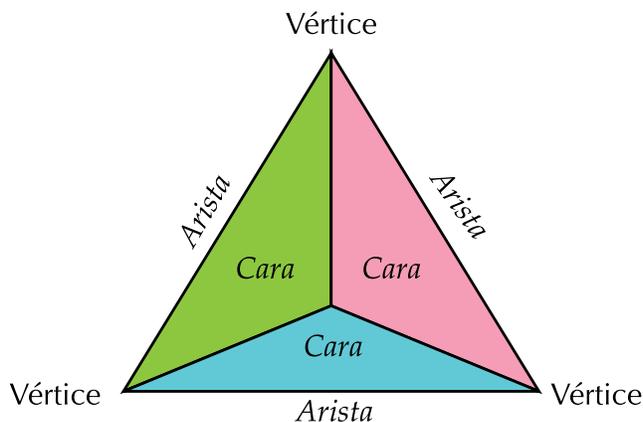
Cuerpos geométricos regulares o sólidos geométricos	
Poliedros	Cuerpos redondos
Cuerpos limitados por caras planas	Cuerpos limitados por caras curvas o por caras curvas y planas
<p>Pirámide</p> <p>Prisma</p>	<p>Cilindro</p> <p>Cono</p> <p>Esfera</p>

Los sólidos o cuerpos geométricos, tienen formas diferentes pero elementos comunes. Los sólidos están limitados por caras planas o por caras curvas o planas y curvas.

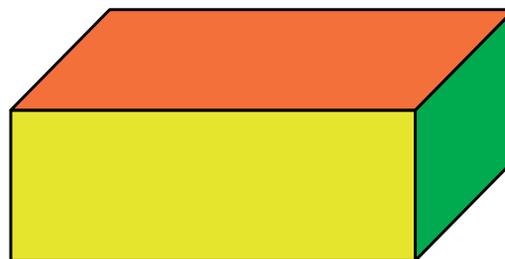
Si sus caras son planas, se llaman poliedros y si sus caras son curvas o curvas y planas, se llaman cuerpos redondos.

Hemos dicho que los prismas y las pirámides son poliedros y los poliedros tienen caras, aristas y vértices.

A continuación, encuentras una pirámide que tiene señalados sus vértices, sus aristas y sus caras.



Ahora tú, con un compañero, señala las caras, las aristas y los vértices del prisma siguiente.



### Entendemos por...

**Unidimensional** el término utilizado para describir figuras que se miden en una sola dirección, como una línea, que sólo tiene longitud.

**Bidimensional** el término utilizado para describir figuras planas en las que se miden dos dimensiones: largo y ancho. Por ejemplo las dimensiones de un terreno.

**Tridimensional** el término utilizado para describir cuerpos que ocupan un lugar en el espacio.



### Aplicación

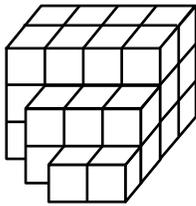
Una actividad muy importante en Matemáticas es la modelación.

La modelación matemática permite al alumno aprender las matemáticas de manera aplicada en otras áreas del conocimiento, y también mejorar la capacidad para representar situaciones.

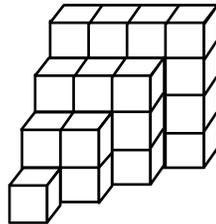
### Diversión matemática

Diviértete observando y contando cubos. Análzalo con algunos compañeros.

¿Cuántos cubos hay?



¿Cuántos cubos hay?



### Modelación del prisma, de la pirámide y del cono

A continuación encuentras los moldes de algunos sólidos o cuerpos geométricos que debes copiar o calcar, cada uno en una hoja de cartulina o de papel.

Los cuerpos geométricos que vas a modelar son: El prisma rectangular o paralelepípedo, la pirámide de base triangular llamada tetraedro y el cono.

Recorta cada figura, úntale pegante a las pestañas y ármalas. Luego, describe cuántas caras, aristas y vértices tiene cada uno, si los tiene.

### Día a día

#### Trenzado de canastos

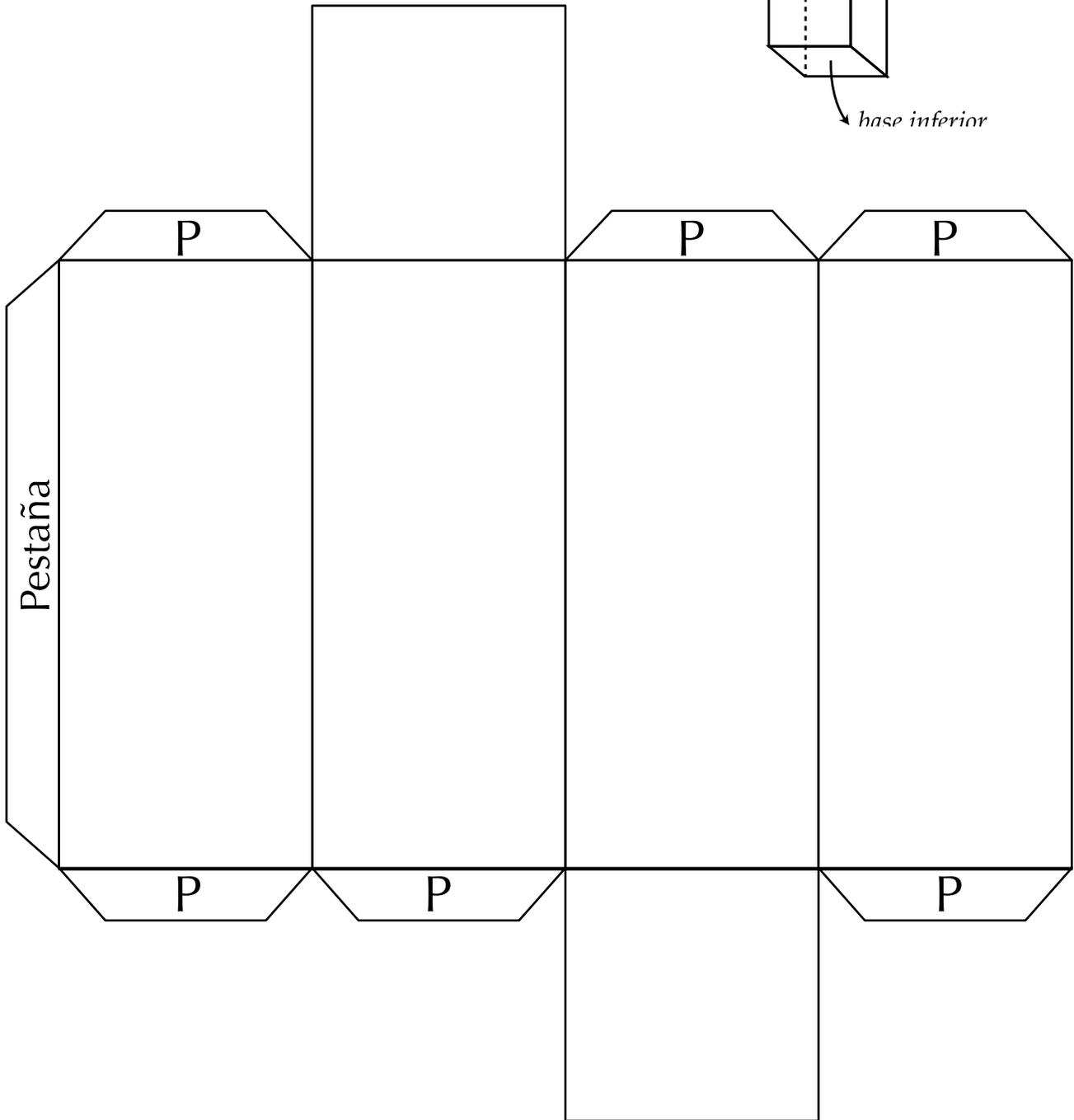
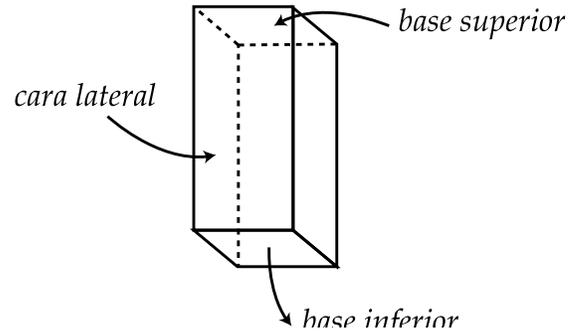
Ya en el año 5,000 antes de Cristo, era ya común la fabricación de canastos y de ropa. Probablemente el trenzado de canastos fue primero, pues es más fácil trenzar un canasto que tejer un vestido. Además no se requería telar ni los tejedores y podían usar tallos enteros de plantas, en vez de usar hilar las fibras de éstas para obtener hilo.

En China utilizaban tiras de bambú, en Oriente medio usaban lino y paja y en Europa utilizaban el sauce. Estos mismos materiales eran usados para trenzar esterillas. Si observas los canastos que hoy en día fabricamos en nuestros pueblos verás que sus tiras forman segmentos paralelos y segmentos que se cruzan.



### 1. Prisma rectangular

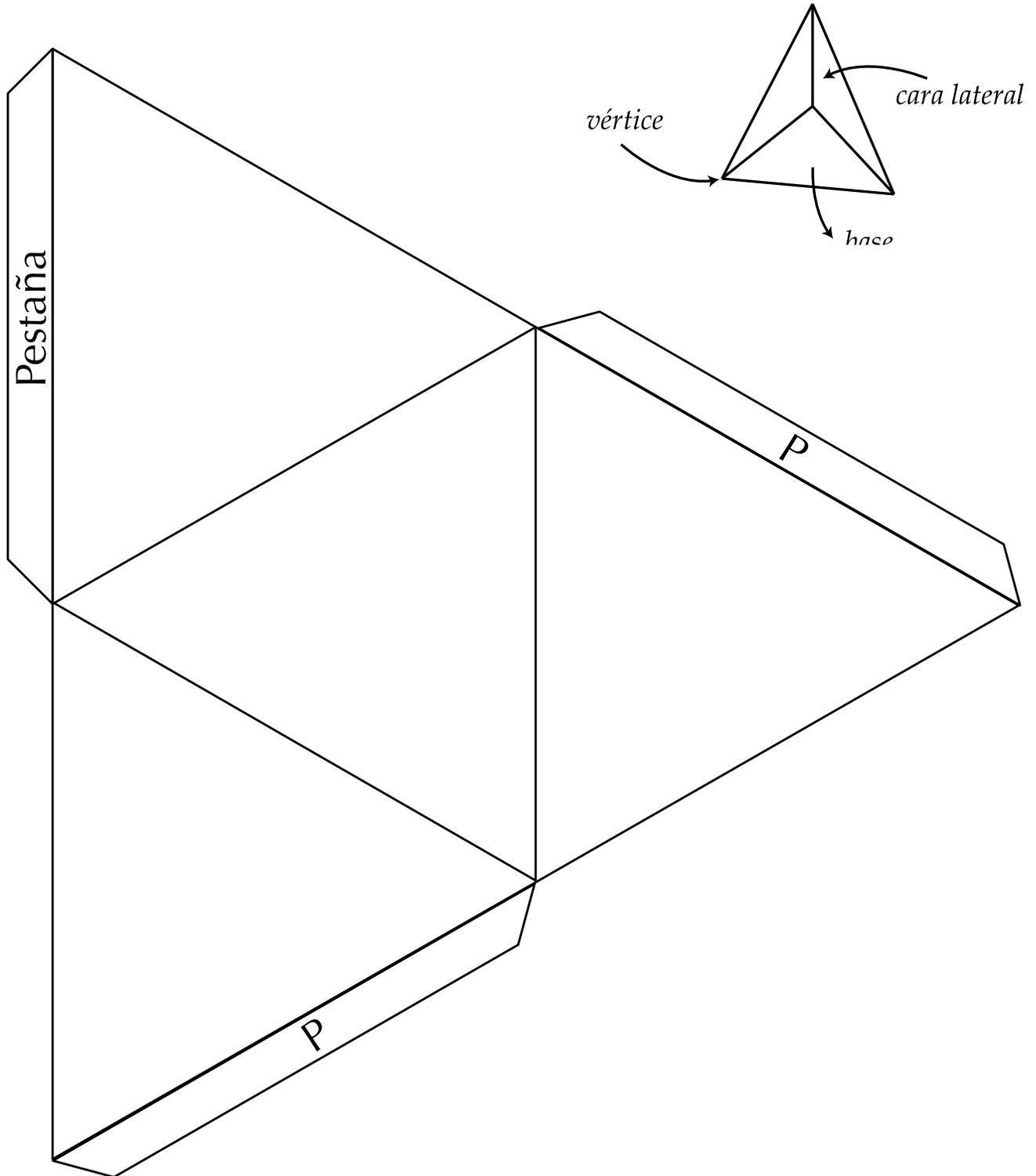
Así queda el prisma rectangular o paralelepípedo



Una vez construido, mídele la altura y describe sus caras (explica cómo son).

## 2. Pirámide

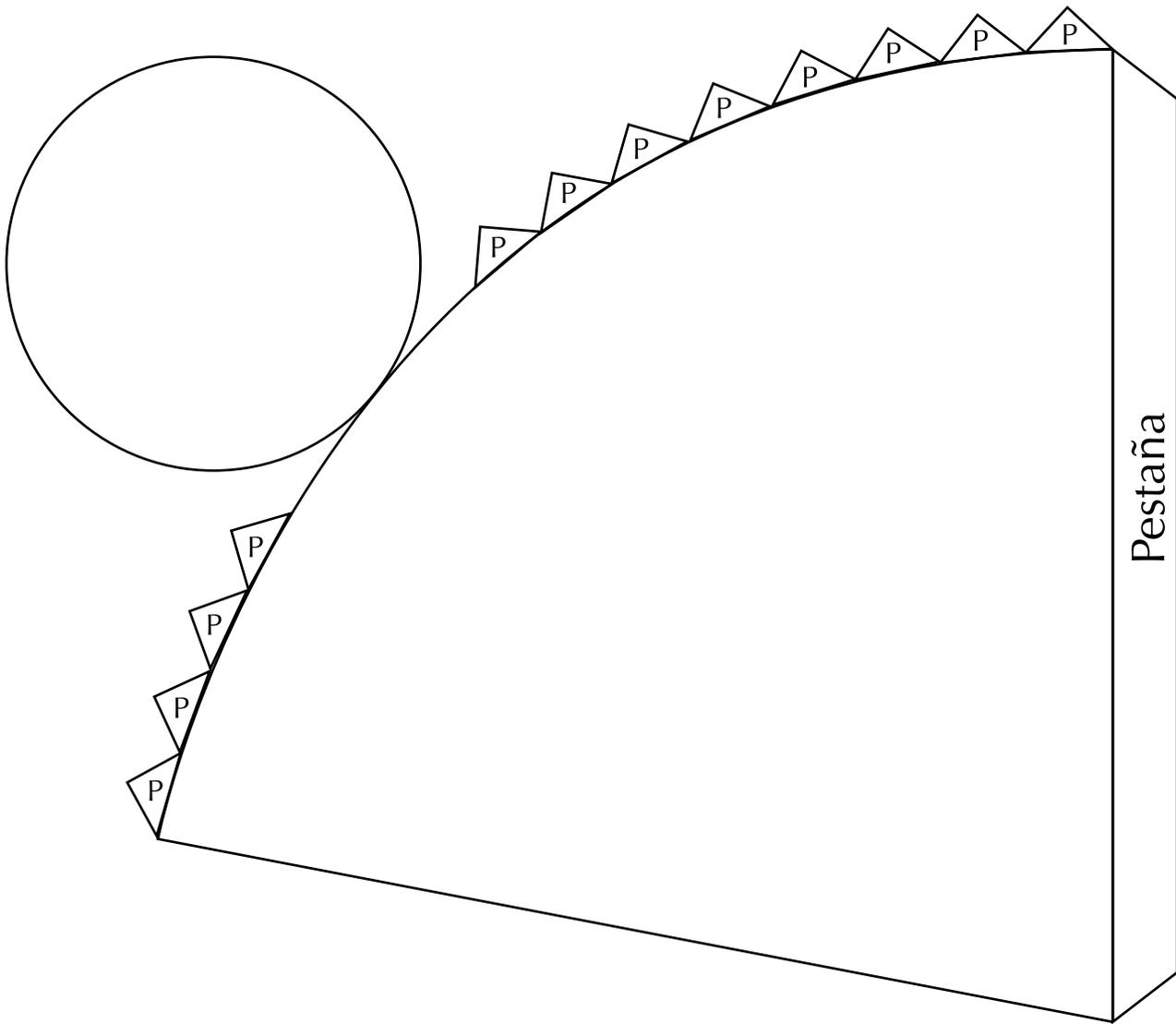
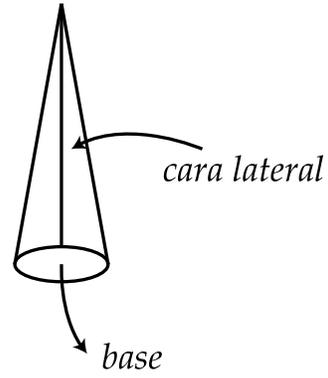
Así queda la pirámide  
triangular o tetraedro



Una vez construido, mídele la altura y describe sus caras (explica cómo son).

3. Cono

Así queda el cono



Una vez construido, mídele la altura y describe sus caras (explica cómo son).

## Tema 3. Construcciones simétricas y a escala



### Indagación

¿Te has detenido a observar regularidades geométricas que hay en la naturaleza?

La naturaleza que nos rodea está llena de formas y figuras, muchas de ellas repetitivas.

Fíjate que en las flores, en las hojas de las plantas, en los ramitos de brócoli o en los panales de las abejas, existe la repetición de una misma estructura, dando lugar a imágenes de increíble belleza.

Un fractal es básicamente una figura geométrica. Los fractales tienen una propiedad son autosemejantes, es decir que las figuras se repiten una y otra vez de una forma infinita.

La naturaleza que nos rodea está llena de fractales. Basta detenerse a observar las plantas para ver repetición de la misma figura ya sea en ramas, flores o frutos.



Figura 1



Figura 2



Figura 3



Figura 4

Observa detenidamente las figuras 1, 2, 3 y 4. Contesta en tu cuaderno las preguntas siguientes y después comenta tus respuestas con tres compañeros.

1. Dibuja la figura geométrica que se repite en la Figura 1. Descríbela.
2. ¿Qué puedes decir de la Figura 3 en cuanto a la forma y tamaño de sus componentes?
3. ¿A qué se parece la forma de los componentes de la Figura 4?
4. Escribe cinco ejemplos de fractales que hayas observado en la naturaleza.



### Conceptualización Simetría

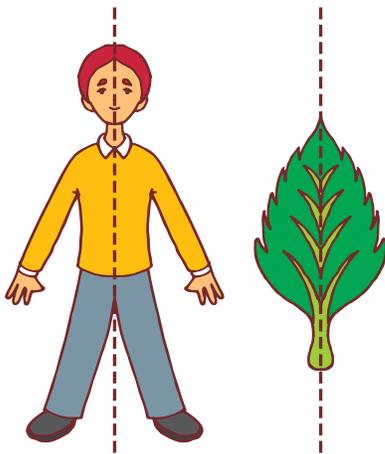
En la naturaleza, es posible encontrar múltiples ejemplos de figuras que son simétricas; pero, ¿qué es simetría?

En cada uno de los dibujos siguientes, hay una línea punteada que los divide en dos partes.

Estas pueden coincidir perfectamente al doblar la hoja por la línea punteada.

A esta línea punteada se le llama eje de simetría y a las figuras se les conoce como figuras simétricas.

Como en cada dibujo hay un eje de simetría y las dos partes son congruentes (coinciden en todos sus puntos), entonces, la ilustración es un ejemplo de simetría axial.

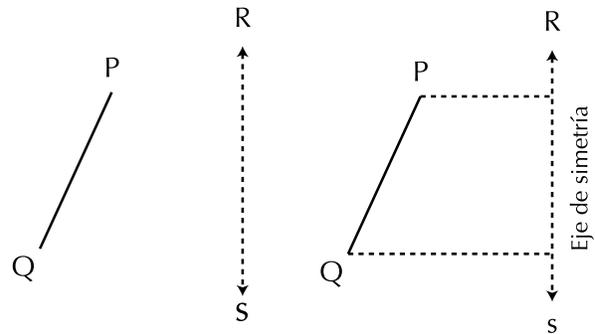


Por lo tanto, podemos afirmar que:

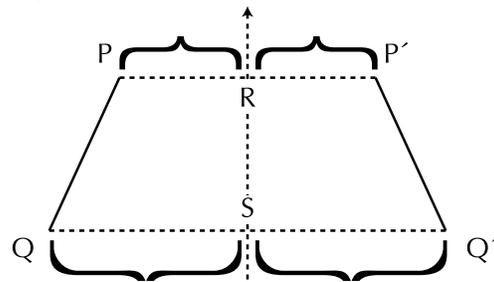
***Dos partes de una figura son simétricas, si al doblar la figura por el eje de simetría y superponer las partes, ellas coinciden en todos sus puntos.***

Para encontrar el simétrico de un segmento respecto a un eje, procedes siguiendo las instrucciones siguientes:

- En una hoja de papel o cuaderno, se trazan el segmento PQ y el eje de simetría RS.
- Se trazan los segmentos perpendiculares (punteados), que van desde los puntos P y Q hasta el eje de simetría, que es la recta RS.



- Hacia el lado derecho se toma una distancia igual a la que hay desde P hasta el eje RS marcando el punto P'.
- La misma distancia que hay de Q al eje RS se toma hacia la derecha obteniendo el punto Q'.
- Ahora se unen los puntos P' y Q' para trazar el segmento P'Q'.

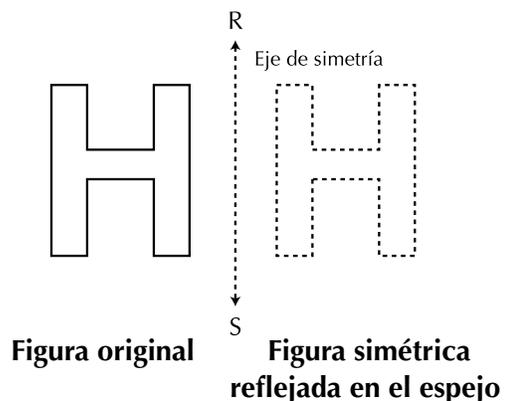


- El segmento PQ es homólogo al segmento P'Q'.
- Observa que los segmentos que atraviesan en eje son paralelos.

En general:

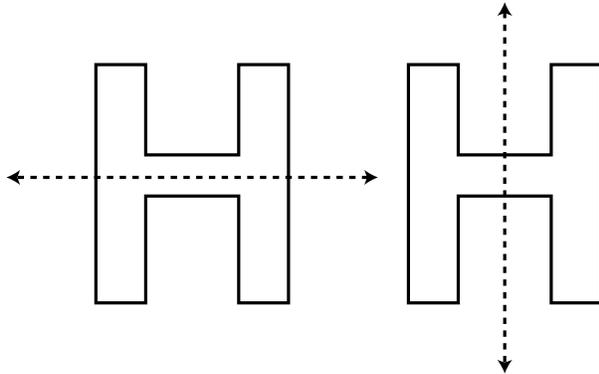
Ahora se utilizará el eje de simetría como si se tratara de un espejo y véase lo que sucede con la figura original:

La figura que se refleja en el espejo se considera como simétrica y el eje de simetría RS sugiere la idea del espejo en el cual se refleja la figura original.

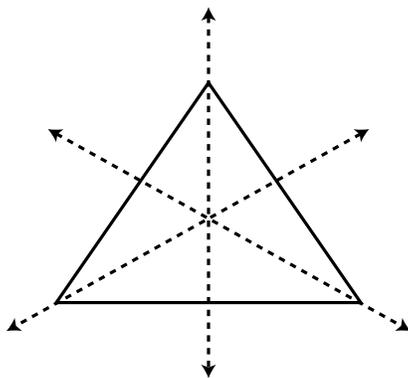


En una figura se puede encontrar más de un eje de simetría, ejemplos:

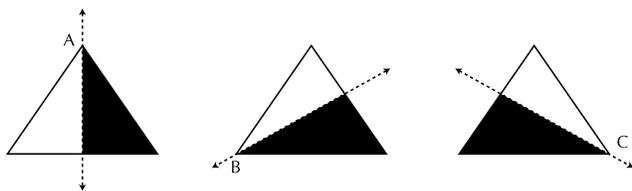
1. En este caso, la letra H tiene dos ejes de simetría.



2. El triángulo equilátero tiene tres ejes de simetría coplanares, en virtud de que sus tres lados son de la misma medida.

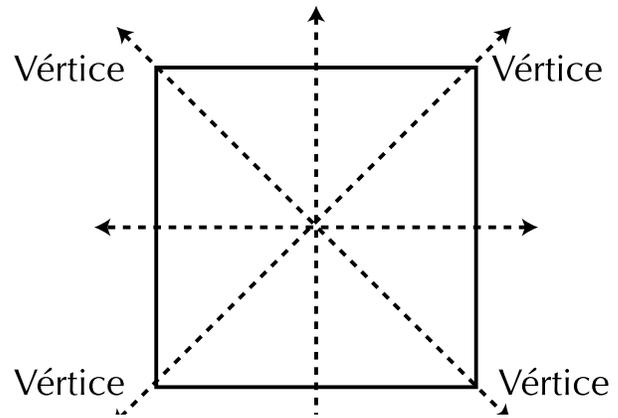


Obsérvese la comprobación de que en el triángulo equilátero hay tres ejes de simetría. Por cada vértice pasa un eje.



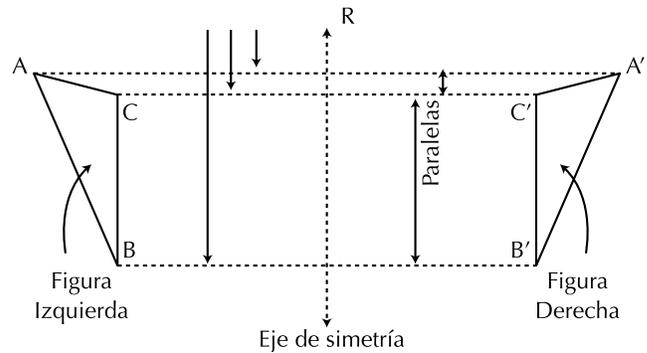
El cuadrado tiene **cuatro ejes de simetría** coplanares, de los cuales dos de ellos pasan por los vértices (dos diagonales) y los otros dos pasan por los puntos medios de los lados opuestos.

Existe otro eje de simetría, perpendicular al plano de la hoja, que pasa por el centro.



La figura siguiente muestra la simetría del triángulo **ABC**, a través de perpendiculares, con respecto un eje de simetría que en este caso es la recta **RS**, y da como resultado el triángulo **A'B'C'**.

### Perpendiculares al eje de simetría



El punto **A** es homólogo o correspondiente con el punto **A'**, el punto **B** es homólogo o correspondiente con el punto **B'**, el punto **C** es homólogo o correspondiente con el punto **C'**.

Las dos figuras se superponen (la una encima de otra), mediante la simetría, todos sus puntos coinciden; entonces, se dice que las dos figuras son **congruentes**.

El símbolo de congruencia es  $\cong$ . En este caso el triángulo **ABC** es congruente con el triángulo **A'B'C'**.

Simbólicamente se escribe:  $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ .

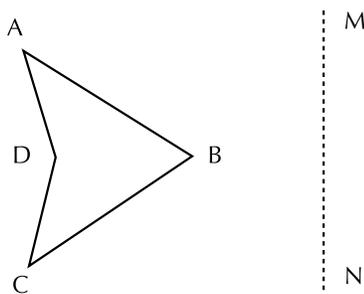
### Propiedades de la simetría axial

Analizamos los ejercicios siguientes:

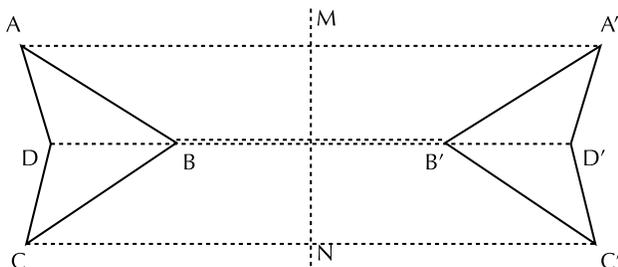
1. Dados el cuadrilátero **ABCD** y el segmento de recta **M**, trazar el cuadrilátero **A'B'C'D'** simétrico al cuadrilátero dado.

**Solución**

Dados el cuadrilátero **ABCD** y el eje axial **MN**.



Se construyen los cuadriláteros **ABCD** y **A'B'C'D'**.



La simetría axial de los cuadriláteros **ABCD** y **A'B'C'D'** cumple las propiedades explicadas en el cuadro siguiente:

1. Los homólogos son equidistantes al eje de simetría	A y A' B y B' C y C' D y D'	La distancia de A al eje MN es igual que la distancia de A' a MN
2. Los segmentos que unen los puntos homólogos son:	$\overline{AA'}$ $\overline{BB'}$ $\overline{CC'}$ $\overline{DD'}$	Los segmentos que unen los puntos homólogos son perpendiculares al eje de simetría. Dichos segmentos son paralelos entre si.
3. Los lados de los cuadrilateros simétricos son respectivamente congruentes	$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ $\overline{CD} \cong \overline{C'D'}$ $\overline{DA} \cong \overline{D'A'}$	Hay simetría y congruencia
4. Los ángulos de las figuras simétricas son:	$\angle A \cong \angle A'$ $\angle B \cong \angle B'$ $\angle C \cong \angle C'$ $\angle D \cong \angle D'$	Además de ser simétricos, son congruentes
5. El orden en que están situados los puntos en la figura original es:	A,B,C,D	El orden de los puntos de la figura simétrica es opuesto a los de la original A',B',C',D

**Escalas**

No siempre se puede representar un objeto en su tamaño original. Algunas veces es necesario dibujarlo más grande o más pequeño. Al resultado de este procedimiento se le conoce con el nombre de dibujo a escala.

Para realizar un dibujo a escala se establece una relación de cociente o división entre las medidas del objeto real y las medidas del dibujo, por lo que se tienen tres tipos de escalas:

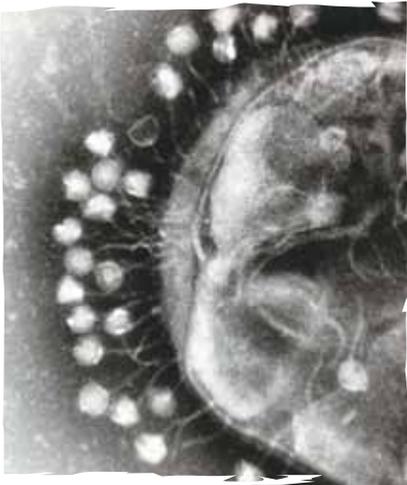
**Escala natural.** Cuando el dibujo tiene las mismas dimensiones que el objeto que representa.

**Escala de ampliación.** Cuando las medidas del dibujo son mayores que las del objeto que representa.

**Escala de reducción.** Cuando las medidas del dibujo son menores que las del objeto que representa.

Veamos con un ejemplo cómo se establece la escala:

1. Existen unos virus, llamados bacteriófagos que destruyen ciertas bacterias, alimentándose con ellas.



En la ilustración, aparecen bacteriófagos, cuya foto fue tomada a través de un potente microscopio que aumentó su tamaño 55,000 veces, pues tanto los virus como las bacterias no pueden verse a simple vista.

La escala es 55,000: 1 ó 55,000/1.

A este tipo de escala se le conoce como escala de ampliación.

De todo lo anterior, se puede afirmar que:

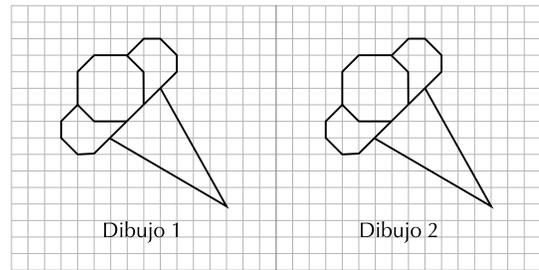
**Las aplicaciones de las escalas de medida se pueden observar claramente en fotografías, juguetes, esculturas, maquetas, etc.**

### Escala natural

El dibujo muestra una figura original y su representación a escala natural, es decir que la dimensión de cada uno de sus lados tiene la misma medida que la figura original.

La razón de proporcionalidad es uno a uno 1:1. Las figuras además de tener la misma forma son congruentes.

**Escala natural es aquella en que el dibujo tiene el mismo tamaño del objeto original.**



En la figura de los conos, el dibujo 2 es una reproducción del dibujo 1 con las mismas dimensiones de éste, o sea, la escala a la que está hecho es uno a uno (1 :1) y, por tanto, los dos dibujos son congruentes.

También puede decirse que un dibujo hecho a escala natural (1:1, 2:2, etc.) es congruente con el original.

**Las figuras congruentes son aquellas que tienen la misma forma e igual tamaño.**

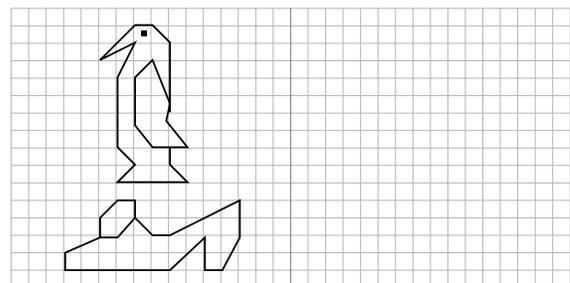
Algunos ejemplos de fabricación de objetos en tamaño real (escala natural) son los maniqués para exhibir ropa, o los utilizados en medicina, de ciertas funciones y enfermedades, las reproducciones en serie de cualquier objeto, etcétera.

Con un compañero, contesta las siguientes preguntas, en tu cuaderno.

- a. ¿Qué es la razón de proporcionalidad?
- b. ¿Por qué la escala 1:1 es proporcional a las escalas 2:2, 3:3, 4:4,...?
- c. ¿Cómo se les llama a las escalas anteriores?

Lee tus respuestas al grupo; si es necesario, completa lo escrito en tu cuaderno.

Reproduce, en escala natural (mismo tamaño), la figura que se presenta debajo.



Contesta, individualmente y en forma breve, las siguientes preguntas:

- ¿Qué entiendes por escala natural?
- ¿Qué características tienen dos figuras congruentes?
- ¿Cómo se llama la razón que se establece al hacer una figura a escala?

### Escala de ampliación

¿Has observado objetos a través de una lupa? La lupa ayuda a que cada detalle del objeto se vea con mayor precisión pues amplía su tamaño a la vista.

El hacer un dibujo al tamaño real de las cosas, no siempre facilita su observación o estudio y es por eso que se hace de él un dibujo de mayor o menor tamaño, guardando la proporción de sus lados, esto es, se hace un dibujo a escala.

En biología, por ejemplo, se usan modelos gráficos de la célula en una escala mayor al tamaño original, pues de esa forma su estudio se hace más comprensible.

Cuando se realiza la ampliación de una fotografía, lo que se desea es una foto mayor que la primera, en la cual se puedan apreciar los detalles que en la de menor tamaño no se perciben.

Para la ampliación de un dibujo debe indicarse en primer lugar a qué escala se desea.

En esta razón de proporcionalidad se observa con facilidad que cada segmento del dibujo a escala será el doble del primero.

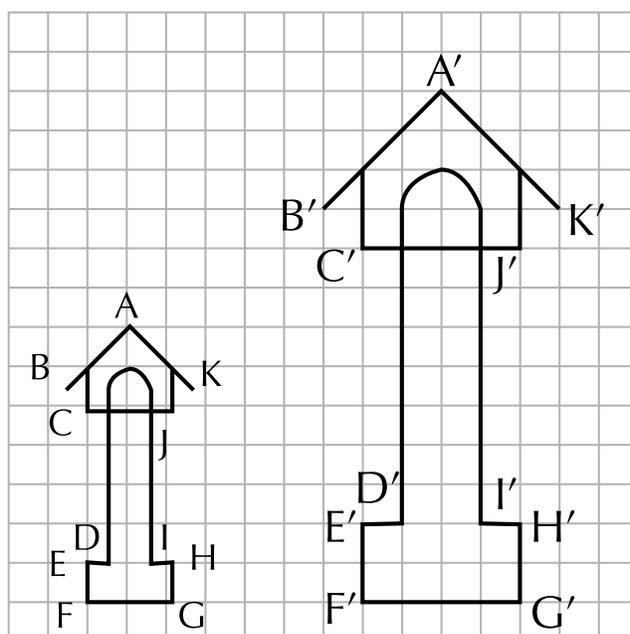
Esta escala también se puede indicar como 2/1 ó 2:1.

Observa las dos figuras siguientes:

La escala 2:1 significa un objeto o dibujo es el doble del primero. Así: el segmento FG mide 2 unidades, el segmento F'G' mide 4 unidades, en el dibujo ampliado, hecho a escala.

El segmento AB es una diagonal que mide un cuadro y medio mientras que el segmento A'B' mide tres cuadros y también es diagonal. Los demás segmentos son semejantes a los anteriores.

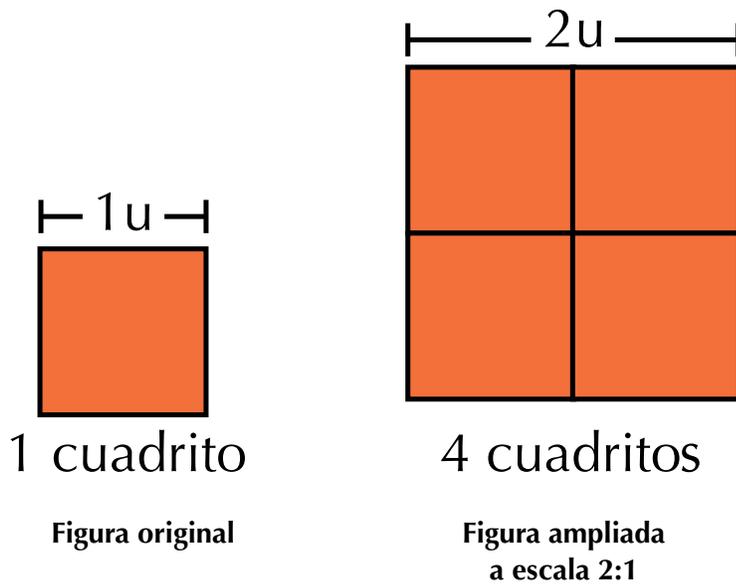
La figura ampliada fue hecha a escala 2:1 (dos es a uno) lo que significa que la longitud de los segmentos de la figura construida a escala, es el doble de la longitud de los primeros.



**Escala de ampliación es la reproducción de un objeto o figura en tamaño mayor del que tiene el objeto o figura original; dicha reproducción puede ser otro objeto o su dibujo.**

Analicemos los casos siguientes:

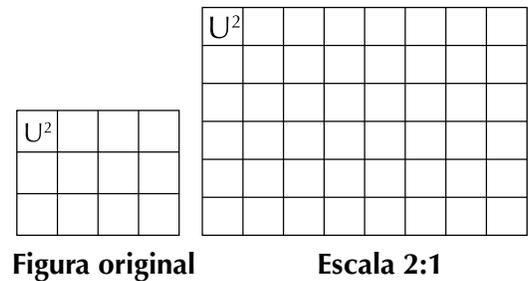
- El caso más sencillo de analizar es reproducir, en escala 2:1, el cuadrado que mide 1 unidad (1u) de lado. Observa que la figura original es un cuadrado de lado 1u y si se duplica el lado, la nueva figura es de 2 unidades de lado. Por lo cual la superficie de una figura en escala 2:1 se cuadruplicará en relación con la figura original.



2. Observa las figuras del recuadro de la derecha. La figura original está formada por  $12u^2$  (12 cuadritos), 4 cuadritos por un lado y 3 cuadritos por el otro. Su ampliación está en escala 2:1, luego, la figura ampliada tiene 8 cuadritos por un lado y 6 cuadritos por el otro, en total  $48u^2$  ó  $48u^2$ .

Observa que las longitudes de los lados del rectángulo ampliado a escala 2:1, son el doble de las longitudes de los del rectángulo original y su área es cuatro veces mayor.

3. Si la escala es 3:1 (tres es a uno), cada segmento del segundo dibujo será el triple del primero, como en este ejemplo. El dibujo original tiene 3 cuadritos de área, y el segundo dibujo tiene un área de 27 unidades cuadradas. En el dibujo ampliado, el área se ha hecho 9 veces mayor.

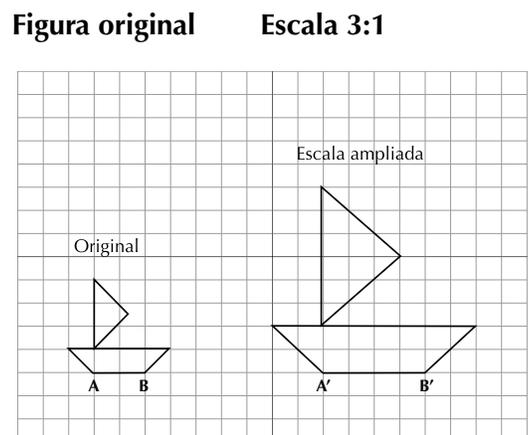


**Dadas una figura y su ampliación, ¿cómo descubrir su escala?**

Para indicar la proporción que guarda una figura con respecto a otra, El segmento  $A'B'$  corresponde a  $AB$  en la figura original.

Si se desea conocer la escala a la que fue hecha la segunda figura en relación con la primera, se anota como primer número la medida de  $A'B'$  y como segundo la de  $AB$ , de donde resulta la escala 4:2, y simplificando, 2:1.

Es importante destacar que al reproducir una figura o elaborar su dibujo a escala de ampliación, los ángulos conservan su medida.



### Escala de reducción

Cuando observas un pájaro que vuela en el cielo, su tamaño se muestra varias veces menor que el que tiene realmente.

Esto es algo parecido a lo que ocurre con la escala de reducción.

El tamaño de los objetos que están cerca no se percibe igual que cuando se van alejando, pues el aumento la distancia entre ellos hace que se vean cada vez más pequeños.

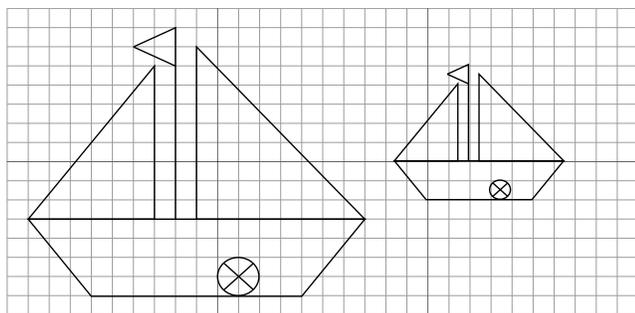
La fotografía de una persona en una cédula o documento es como un dibujo reducido que conserva la proporción en sus formas; esto es, la fotografía es como el dibujo hecho a escala de reducción de una persona.

**Escala de reducción es la reproducción o dibujo de una figura u objeto en tamaño menor del que tiene la figura u objeto original.**

Si la escala es 1:2 (uno es a dos) o  $1/2$ , significa que la longitud de los segmentos en la reproducción son la mitad de la figura original.

Véanse los dibujos siguientes:

Tomando al barco grande como figura original, la escala a la que está hecho el otro barco es 1:2.



Original

Reducción

Obsérvese las características siguientes:

La línea inferior del barco original mide 12 unidades y en la reproducción 6, puesto que la escala señala  $1/2$  ó 1:2 del original.

La vela menor tiene 8 unidades de alto en el original y 4 en la reproducción.



El asta tiene 10 unidades en el original y 5 en la reproducción.

El largo del barco original es de 20 unidades y en la reproducción de 10.

Para conocer cada longitud en una reproducción 1:2, se toma la mitad de la figura original.

Por cada longitud que conforme la figura original, se toma la mitad en la reproducción.

Un ejemplo claro de la utilización de las escalas de reducción son los mapas de ciudades, departamentos, países, etc., en donde inclusive algunos indican la escala que se utiliza para realizar dicho dibujo.

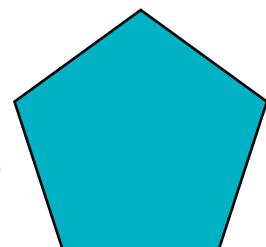


### Aplicación

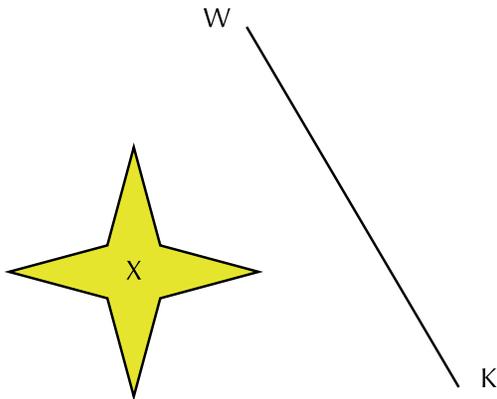
Copia los ejercicios siguientes en tu cuaderno y resuélvelos Individualmente.

Discute las repuestas con algunos compañeros.

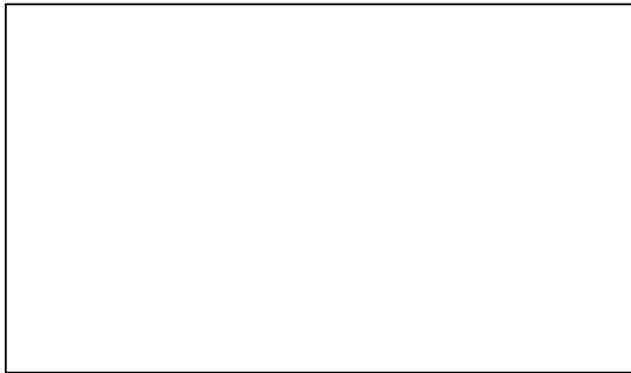
1. Un pentágono regular tiene cinco ejes de simetría coplanares en virtud de que tiene cinco lados de la misma longitud y cinco ángulos de igual medida.



2. Traza la figura Y, simétrica a la figura X, con respecto al eje kw.



3. Dibuja una mariposa y trázale el eje de simetría.

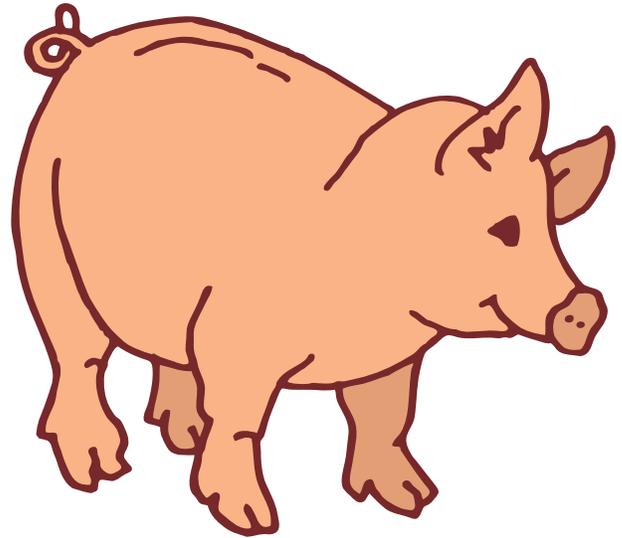


4. Calca el payaso en una hoja, recórtalo por su eje de simetría y verifica si las dos partes coinciden una con la otra en todas sus partes. Discútelo con compañeros.

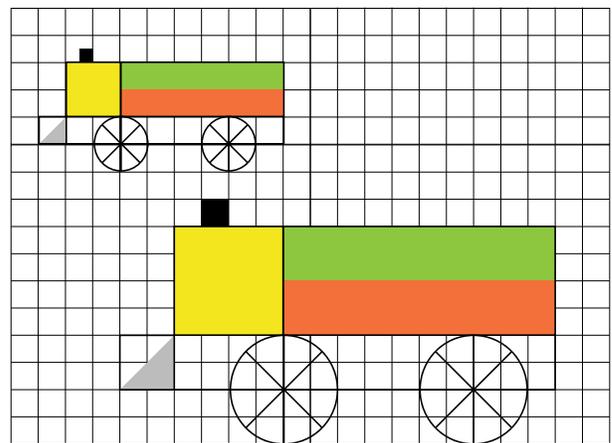


5. Pedro hace el plano de su salón de clase, que es de forma rectangular y mide 7 m de largo y 4.5 de ancho. El rectángulo que lo representa mide 14 cm de largo y 9 cm de ancho. ¿Cuál escala deberá anotar Pedro en su dibujo?

6. Copia o calca en tu cuaderno la figura adjunta y realiza una copia a escala 1:2 y otra a escala 3:1.



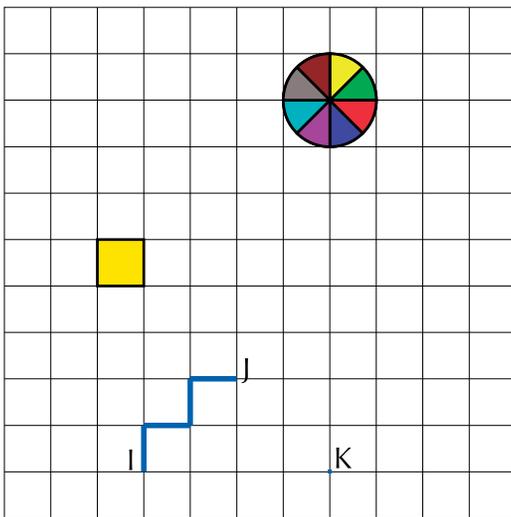
7. Copia o calca las figuras en tu cuaderno y trázale sus ejes de simetría. Toma un cuadrado como unidad de medida. En la cuadrícula encuentras dos trenes.



- ¿Cuántas unidades tiene el ancho del tren más grande?
- ¿Cuántas unidades tiene el ancho del tren pequeño?
- ¿Cuántos cuadrillos tiene la chimenea del tren de abajo (grande)?

- d. ¿Cuántos cuadrillos tiene la chimenea del tren de arriba (pequeño)?
- e. Se llama radio al segmento que une el centro de la rueda con un punto de ella. ¿Cuántas unidades mide el radio de cada rueda del tren grande?
- f. ¿Cuántas unidades mide el radio de cada rueda del tren pequeño?

Copia la cuadrícula y los dibujos de ella, en tu cuaderno realiza los ejercicios 8 a 10.



- 8. Dibuja a escala 2:1 el círculo con centro en  $O$ .
- 9. Dibuja la escalera  $I$  a escala 3:1, a partir del punto  $K$ , y forma la escalera  $KL$ .
- 10. Reproduce el cuadro amarillo en escala 3:1.

### Entendemos por...

**Simétrico** el objeto que es congruente con otro, es decir, coinciden en todas sus partes.

**Coplanares** figuras o elementos que están situados en un mismo plano.

### Diversión matemática

Elige un dibujo que te guste y reproduclo, dos veces:

- a. A escala 1:2.
- b. A escala 2:1.

Compáralos y explica tus conclusiones todo ello en tu cuaderno.

### Día a día

#### Geometría fractal

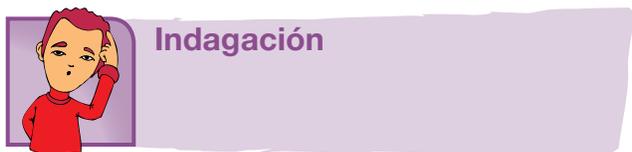
Las formas que se componen por repetición de una figura son estudiadas por la Geometría Fractal.



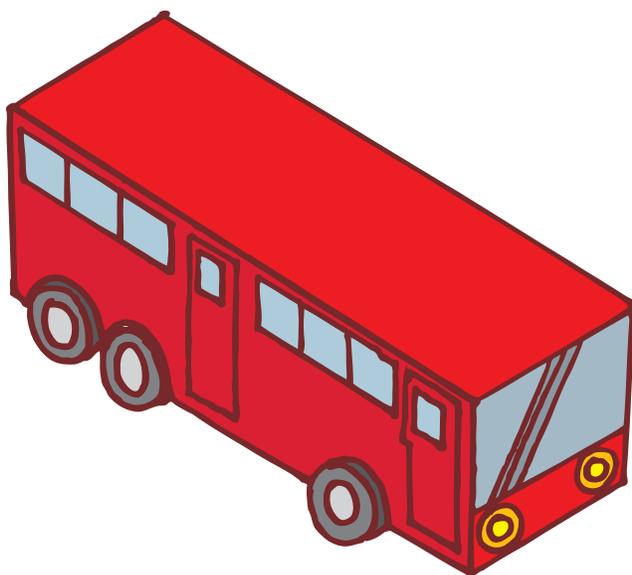
El primero en hablar de Fractales fue el investigador Benoit Mandelbrot (1936- 2010 ), nacido en Polonia. Sus padres emigraron a Francia en 1936 y su tío Szolem, profesor de matemáticas en el Collège de Francia asumió la responsabilidad de su educación. Benoit estudió en Paris, Lyon y en California (en Caltech). Entre otros premios, ha recibido la "Barnard Medal for Meritorius Service to Science", la Medalla Franklin y la Medalla Steinmetz (ésta, en 1991).

Tomado de: [tratohechocom.blogspot.com](http://tratohechocom.blogspot.com)

# Tema 4. Construyo ángulos y clasifico polígonos



Observa la foto adjunta y descubre los ángulos y demás figuras geométricas que ella tiene.



En tu cuaderno realiza el bosquejo del diseño geométrico de lo que hay en la foto.

¿Recuerdas el ejercicio 1 de la aplicación del primer tema de esta unidad? Puedes revisarlo.

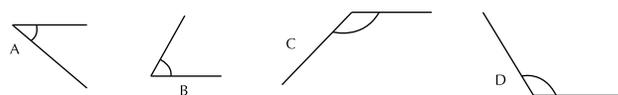
Identifica todos los posibles ángulos y polígonos que encuentres.

Puedes repintar, con lápiz y regla, en tu dibujo, las formas que veas y hacer la lista de los ángulos y de los polígonos que se encuentran.



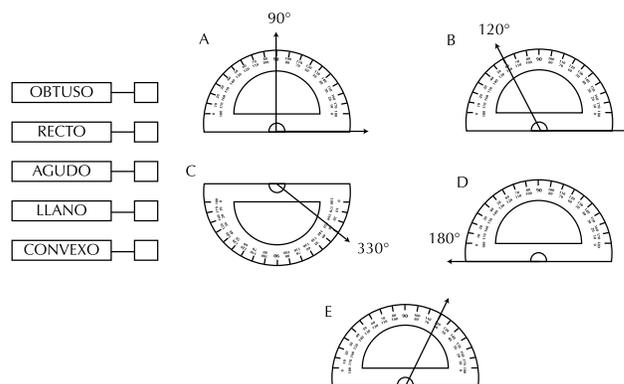
Ya conoces, desde los cursos 4° y 5°, los ángulos agudo, recto y obtuso y sabes manejar el transportador.

Ahora vas analizar algunos ángulos importantes que más adelante vas a utilizar en la clasificación de polígonos. Cálcalos o dibújalos en tu cuaderno y con el transportador, encuentra la medida de cada uno, escríbeles sus medidas y clasifícalos.

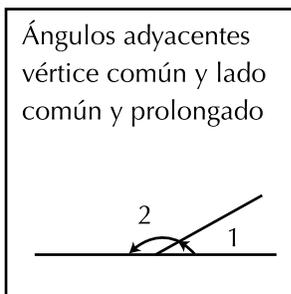
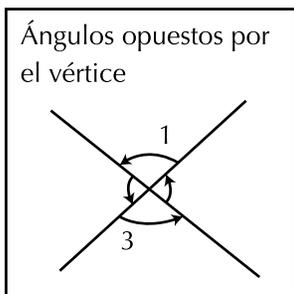
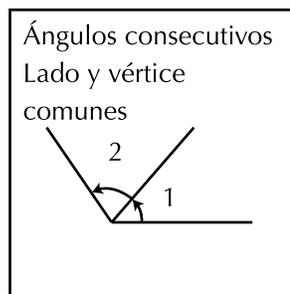
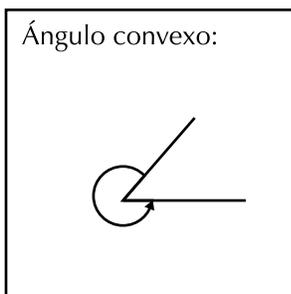
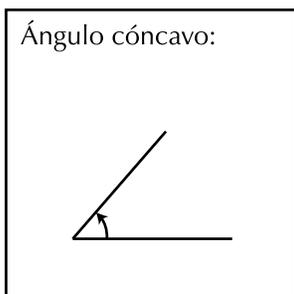
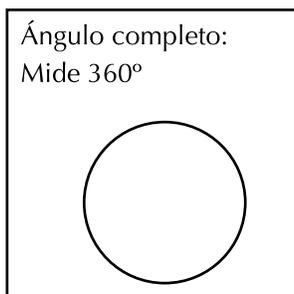
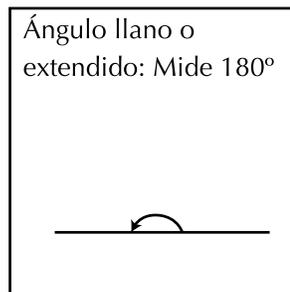
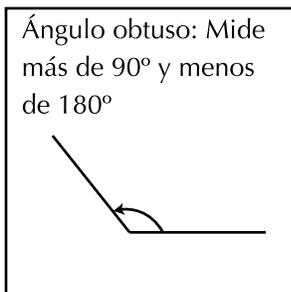
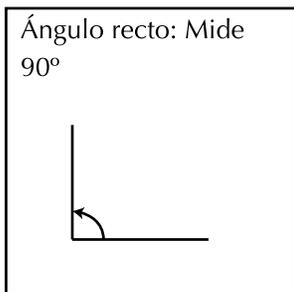
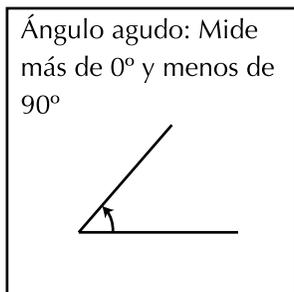


En la actividad siguiente, debes leer en el transportador la medida del ángulo y clasifícalo según el cuadro que aparece en el lado izquierdo.

Anota en la casilla, la letra correspondiente que aparece en el transportador del lado derecho.



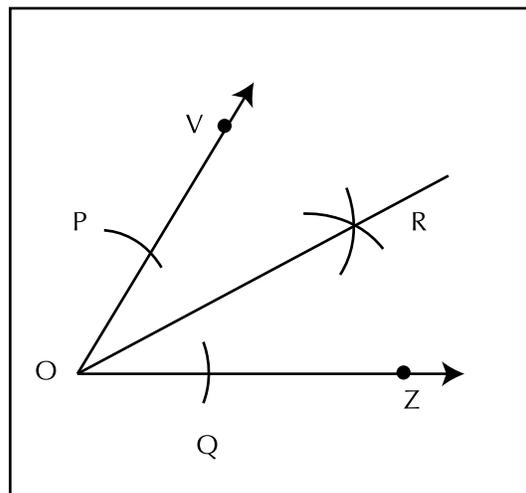
Los ángulos pueden ser:



### Bisectriz de un ángulo dado

Dado el ángulo VOZ, trazar la bisectriz.

- Apoyando el compás en el vértice **O**, se trazan dos arcos con la misma abertura, señalarlos con las letras **P** y **Q**.
- Con la misma abertura del compás, hacer centro en **P** y marcar un arco. Proceder lo mismo con **Q**.
- Llamar **R** al punto donde se cortan los arcos.
- La bisectriz del ángulo se obtiene uniendo este punto **R** con el vértice **O**.



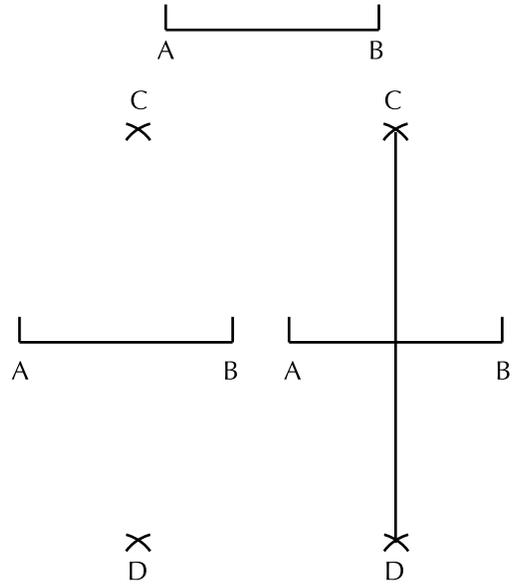
**La bisectriz de un ángulo, es el segmento que lo divide en dos ángulos consecutivos de igual medida.**

### Veamos qué es la perpendicular mediatriz de un segmento

Dado el segmento AB, trazar su perpendicular mediatriz.

#### Procedimiento:

- Apoyándose en el punto **A**, y con una abertura de compás un poco mayor que la mitad de AB, se trazan arcos que se corten hacia arriba y hacia abajo del segmento (los puntos corte se llamarán **C** y **D**).
- Se unen los puntos **C** y **D** y se tendrá una recta que corta el segmento AB en el punto medio M, llamado perpendicular mediatriz.



### Los polígonos

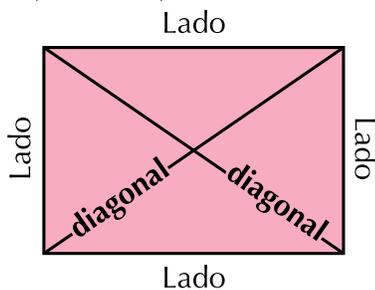
Encontramos diferentes ángulos en las figuras geométricas llamadas polígonos.

**Un polígono es la porción del plano delimitada por una línea poligonal cerrada, que da origen a tres o más lados y tres o más ángulos.**

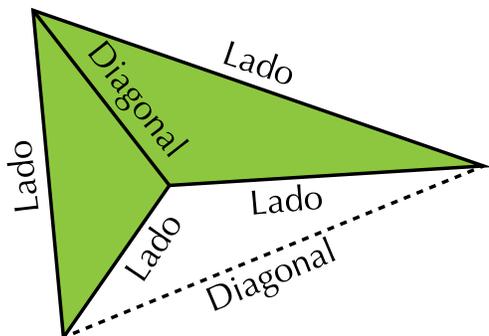
**Se entiende por línea poligonal la unión de segmentos contiguos.**

También puede decirse que polígono es una figura cerrada, formada por segmentos de recta consecutivos pero no alineados conocidos como lados del polígono.

Si al trazar las diagonales de un polígono, todas ellas quedan dentro de él, entonces, se trata de un **Polígono Convexo**,



pero si una o más de las diagonales sale del polígono, entonces, es un **Polígono Cóncavo**.



Recuerda que la diagonal de un polígono es aquel segmento que une dos de sus vértices opuestos.

Estudia bien las características de cada uno: Número de lados, si algunos lados son paralelos, perpendiculares o de otra manera, números de ángulos y cómo son (agudos, rectos, obtusos). Cópialas en tu cuaderno y compara con algunos compañeros.

En compañía de un compañero, estudia el cuadro siguiente y escribe con tus palabras las características de cada figura, en tu cuaderno.

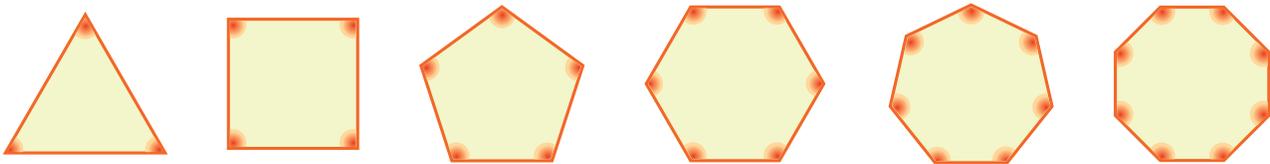
En tu cuaderno, copia y completa la tabla siguiente:

Nombre del polígono	Número de lados	Número de ángulos
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	

Los polígonos también pueden ser **Regulares o Irregulares**.

### Polígonos regulares

Todos sus lados son iguales y sus ángulos son iguales.



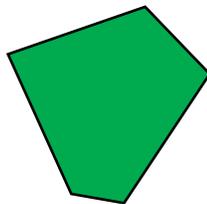
### Polígonos irregulares

No todos sus lados son iguales y por lo tanto, sus ángulos tampoco son todos iguales.

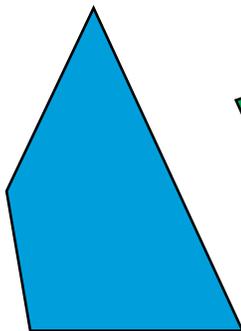
Triángulo irregular



Pentágono irregular



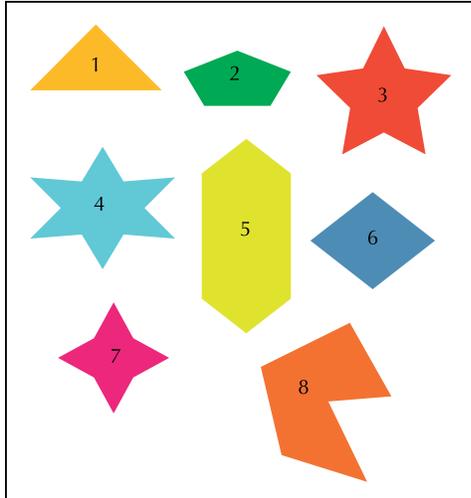
Cuadrilátero irregular



### Aplicación

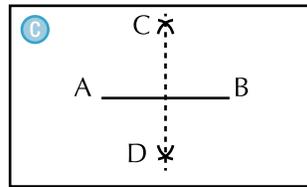
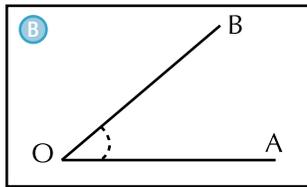
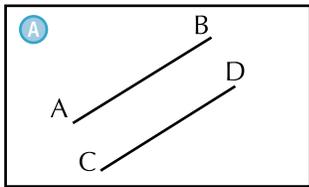
Trabaja con un compañero. Copia en tu cuaderno los ejercicios que aparecen a continuación.

- Observa el conjunto de figuras y completa los espacios de la tabla.



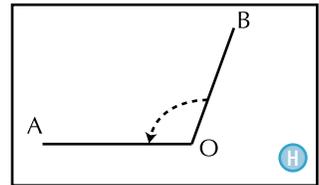
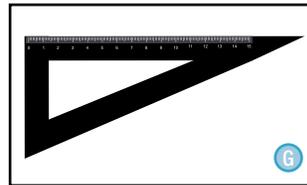
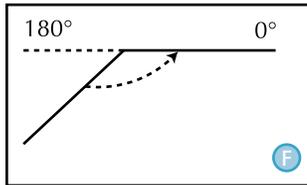
	Nombre de la figura	Número de lados	Número de ángulos
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			
7.			
8.			

b. Dadas las figuras siguientes, escribe en el paréntesis la letra correspondiente a la figura.



D Línea que pasa por el vértice y divide el ángulo en dos partes iguales

Ángulo cóncavo que mide  $90^\circ$



I Mide  $180^\circ$  y equivale a la mitad de la circunferencia



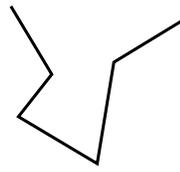
K Semicírculo graduado que sirve para medir ángulos

L Arco completo de la circunferencia mide  $360^\circ$

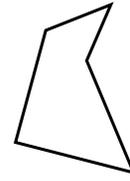
Ángulo convexo	( )	Ángulo agudo	( )	Ángulo colineal	( )
Rectas paralelas	( )	Bisectriz	( )	Escuadra	( )
Transportador	( )	Compás	( )	Ángulo perígono	( )
Ángulo recto	( )	Ángulo obtuso	( )	Perpendicular mediatriz	( )

### Entendemos por...

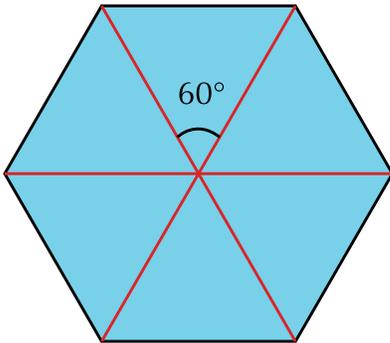
**Línea poligonal** aquella línea que está formada por varios segmentos consecutivos. Una línea poligonal puede ser abierta o cerrada.



Línea poligonal  
abierta



Línea poligonal  
cerrada



### Diversión matemática

#### Los panales

Diviértete imitando a las abejas.

Construye un hexágono regular del tamaño que quieras.

Mira el modelo.

Reproduce todos los que quieras y construye un pequeño panal.

Tú necesitas regla o escuadra y transportador, ¿las abejas también?

### Día a día

#### Polígonos en la actualidad

Cada vez cobra más importancia el uso de los polígonos en la vida moderna, Las construcciones son poligonales.

Vemos los polígonos en los techos, en los pisos, los diseños de las baldosas, en los centros comerciales, en las calles, en los parques, etc.

Los polígonos constituyen un componente esencial de las artes: pintura, dibujo, escultura, fotografía, etc. Observa la cantidad de polígonos de la fotografía de la derecha.

Cada día, en el mundo, los polígonos se popularizan más. ¡Están en todo lado!

¡Descúbrelos!





## Este capítulo fue clave porque

- Comprendí mejor las ideas sobre los términos básicos de la geometría.
- Practiqué las construcciones de paralelas y perpendiculares, familiarizándome con los instrumentos de dibujo.
- Realicé construcciones aplicando simetrías.
- Visualicé la proporcionalidad construyendo dibujos a escala.
- Identifiqué los polígonos y su clasificación.



## Conectémonos con El Arte



### La historia del dibujo

Desde sus orígenes, el hombre ha tratado de comunicarse mediante grafismos o dibujos.

Las primeras representaciones que conocemos son las pinturas rupestres, en ellas no solo se intentaba representar la realidad que le rodeaba, animales, astros, al propio ser humano, etc., sino también sensaciones, como la alegría de las danzas, o la tensión de las cacerías.

A lo largo de la historia, la comunicación mediante dibujos, ha evolucionado, dando lugar por un lado al dibujo artístico y por otro lado al dibujo técnico.

Mientras el primero intenta comunicar ideas y sensaciones, basándose en la sugerencia y estimulando la imaginación del espectador, el dibujo técnico, tiene como fin, la representación de los objetos lo más exactamente posible, en forma y dimensiones.

Hoy en día, se está produciendo una unión entre los objetivos del dibujo artístico y técnico, como consecuencia de la utilización de los ordenadores o computadores en el dibujo técnico.



Con ellos se obtienen recreaciones virtuales en 3 dimensiones. Pero nos preguntamos ¿qué es la pintura rupestre?

Una pintura rupestre es todo dibujo o boceto prehistórico existente en algunas rocas y cavernas. El término «rupestre» deriva del latín rupestris, y éste de rupes (roca), aunque también es sinónimo de primitivo.

En un sentido estricto, rupestre haría referencia a cualquier actividad humana sobre las paredes de cavernas, covachas, abrigos rocosos e incluso farallones o barrancos, etc.

Tomado de: <http://www.dibujotecnico.com/saladeestudios/teoria/historia/historiaintro.php>

# Realizo mediciones y cálculos

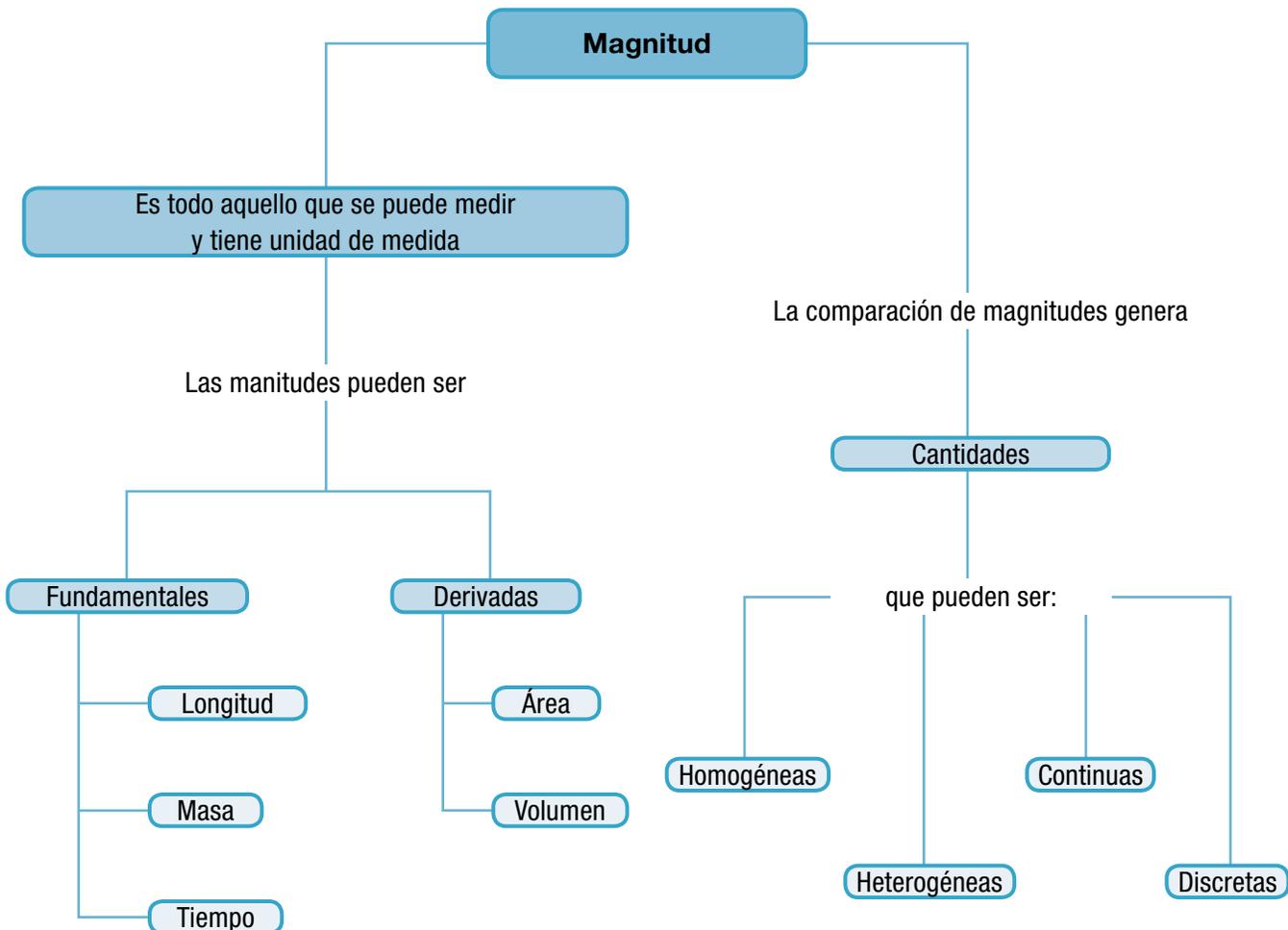
En la historia de las matemáticas, encontramos la Geometría como una parte importante y necesaria en la vida del ser humano.

Desde la antigüedad, el hombre se interesó en la realización de mediciones sobre la tierra, en la distribución de zonas para el cultivo, para la crianza de sus animales y para sus construcciones.

Hoy, sigue teniendo vigencia el diseño y las mediciones en el avance de las ciudades y de las ciencias en general. Con la ayuda de los computadores pueden hacerse los más modernos planos y cálculos, utilizando, figuras geométricas y mediciones.

En nuestra vida cotidiana, constantemente utilizamos diferentes instrumentos para medir cantidades como por ejemplo el reloj que nos mide la cantidad de tiempo empleado en hacer alguna labor o la balanza que nos mide la cantidad de alimento que le suministramos a los animales semanalmente.

En este capítulo tendrás la oportunidad de realizar mediciones de longitud calcular perímetros y áreas, utilizando diversas unidades y solucionar situaciones de la vida diaria que involucren perímetros y áreas, así como mediciones de masa y tiempo.



# Tema 1.

## Construyo los conceptos de magnitud y cantidad



### Indagación

Generalmente las personas en el campo necesitan realizar mediciones de diferente tipo. Miden la tierra que van a cultivar, las semillas que van a sembrar y el alimento que van a dar a los animales, entre otras muchas mediciones que realizan a diario. Piensa qué tipo de mediciones tú has realizado últimamente.

Copia la actividad siguiente en tu cuaderno, desarróllala de manera individual y luego comparte tus respuestas con algunos compañeros.

A continuación encuentras una lista de actividades cotidianas.

De ellas, elige máximo cinco y mínimo tres, que practicas en tu vida cotidiana y cópialas en tu cuaderno.

- Ordeñar las vaquitas.
- Recoger la cosecha.
- Abonar las plantas.
- Trabajar en el galpón.
- Coser ropa.
- Dirigir los trabajadores de la finca.
- Cocinar los alimentos.
- Hacer reparaciones caseras.
- Arar la tierra.
- Pescar en el río o en el mar.
- Manejar el carro o el tractor.
- Cuidar los animales.
- Remar la canoa.

Frente a cada actividad que elegiste, escribe cuáles mediciones realizas generalmente.

Por ejemplo. Quien ordeña, generalmente, mide las botellas o los litros de leche que la vaca produce.

Describe cómo mides en cada actividad elegida. (Si usas algún instrumento o tienes tu propio método para medir).



### Conceptualización

Diariamente estamos usando magnitudes, como las que acabas de nombrar en el ejercicio anterior. A todo lo que es posible medir, se le denomina “magnitud”.

Las magnitudes se expresan en forma numérica, es decir, son cuantitativas, ya que son propiedades o atributos físicos medibles, como por ejemplo: la longitud, la masa, el volumen, la fuerza, la velocidad, la cantidad de una sustancia, etc. Hay magnitudes geométricas como la longitud, el área o el volumen que resultaron de las actividades diarias del hombre y su relación con la naturaleza.

Las magnitudes se miden a través de una cantidad. Por lo tanto:

**Medir una cantidad de una magnitud, es compararla con otra cantidad de la misma magnitud, que haya sido elegida previamente como unidad de medida. Es decir, medir es comparar una magnitud desconocida con una conocida a la que llamamos patrón.**

Debemos tener muy claro qué significa cantidad.

La cantidad es el resultado de una medición, entonces, la cantidad se expresa con números acompañada de unidades. Esto es:

$$\text{Cantidad} = \text{Magnitud} \times \text{Número de Unidades.}$$

Por ejemplo: En 25 kilómetros recorridos, la magnitud es la longitud y las unidades recorridas son 25 km.

### Tipos de cantidades

Una cantidad puede ser: homogénea, heterogénea, continua y discreta.

**Cantidad homogénea:** Una cantidad es homogénea cuando se maneja una sola especie o sustancia. Ejemplo: La cantidad de gallinas de un galpón.

**Cantidad heterogénea:** Una cantidad es heterogénea cuando se manejan varias especies o sustancias simultáneamente. Ejemplo: Una ensalada de frutas.

**Cantidad continua:** Una cantidad es continua cuando sus partes no pueden ser separadas. Ejemplo: El agua contenida en un recipiente.

**Cantidad discreta:** Una cantidad es discreta cuando sus partes están separadas. En la vida real, a veces podemos realizar mediciones directamente, cuando contamos con instrumentos de medida.

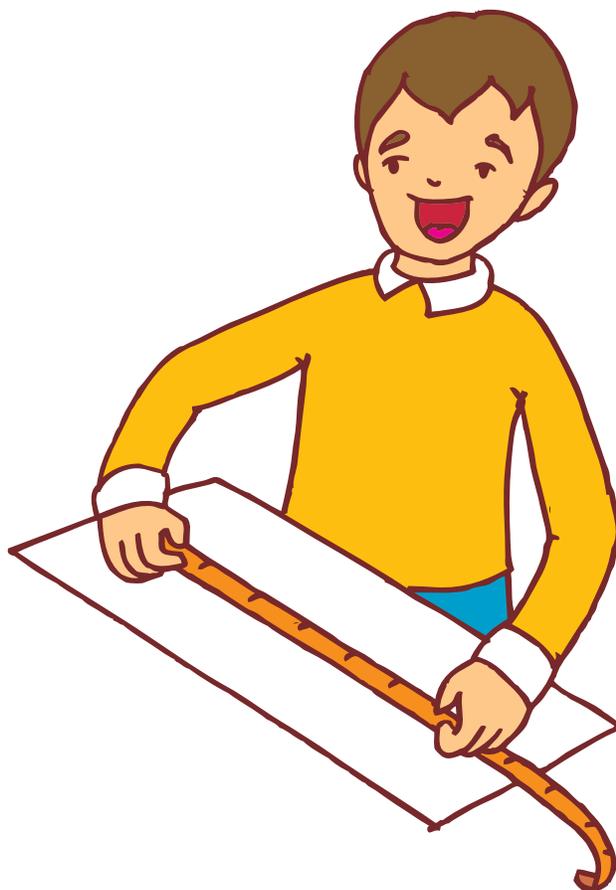
Ejemplos:

- a. El número de naranjas cosechadas.
- b. Juancho quiere medir el largo y el ancho de una lámina de icopor de forma rectangular. Para ello dispone de una cinta métrica, entonces, directamente toma las medidas.

Algunas veces no podemos hacer mediciones directamente por no tener los Instrumentos adecuados o porque lo que vamos a medir es demasiado grande o es demasiado pequeño o porque algo estorba o impide.

Por ejemplo si Juancho midiera directamente superficie de la lámina, tendría que tener una unidad de área, por ejemplo, un pequeño cuadrado de cartón y tendría que ver cuántas veces, ese cuadrado cabría sobre la lámina.

Pero como ya midió el largo y el ancho de la lámina, entonces, puede aplicar la fórmula del área del rectángulo y la habrá medido la superficie indirectamente.





## Aplicación

Resuelve los ejercicios siguientes en tu cuaderno y compara con algunos compañeros.

1. Juega con tres compañeros a nombrar cantidades y clasificarlas. Cada uno debe explicar a los otros sus ejemplos y clasificación y discutan al respecto.
2. El cuento de la corona de oro



Cuenta la leyenda que el rey Hierón le dio una cantidad importante de oro a un orfebre para que le hiciera una corona. Cuando el rey la recibió, tuvo una extraña sospecha de que el orfebre podía haberse guardado parte del oro que le había entregado y haberlo sustituido por plata o cobre.

Intrigado, el rey encargó a Arquímedes averiguar si la corona era de oro puro, pero sin estropearla.

Ante la imposibilidad de romper o siquiera partir un pedazo de la corona para poder averiguar con qué material estaba realmente construida, le dio vueltas al asunto sin poder llegar a una solución.

El matemático sabía que el cobre y la plata eran más livianos que el oro, por lo tanto, si el orfebre hubiese añadido cualquiera de esos metales, la corona ocuparía un espacio mayor que el de un peso equivalente en oro. Conociendo el espacio ocupado por la corona, es decir, su volumen; Arquímedes podía darle una respuesta al rey. El problema, sin embargo, era que él no sabía cómo averiguar el volumen de un objeto sin transformarlo en una masa compacta.

Hasta que un día, mientras disfrutaba de un baño en un espacio público, Arquímedes advirtió que cada vez que entraba una nueva persona al piletón, parte del agua se derramaba por el borde.

Gracias a esto pudo intuir que el volumen de agua desplazada tenía que ser igual al volumen del cuerpo sumergido.

Estaba tan eufórico por su descubrimiento que salió desnudo del baño y corrió hasta su casa gritando “¡Eureka! ¡eureka!” que significa “lo encontré”.

Ya en casa, llenó de agua un recipiente, metió allí la corona y luego midió el volumen del agua desplazada.

Después repitió el mismo experimento pero con un peso igual de oro puro y entendió que el volumen desplazado de agua era menor.

Esto quiere decir que el oro de la corona había sido mezclado con un metal más ligero, lo cual le daba un volumen mayor y hacía que la cantidad de agua desalojada fuera también mayor.

El rey ordenó la ejecución del orfebre.

Texto tomado de: <http://tecuentounahistoria.com.ar/2007/12/25/archimedes-de-siracusa/>

Arquímedes, matemático griego de la antigüedad, que vivió en el siglo II antes de Cristo, realizó, según el relato anterior, una medición indirecta.

Explica en tu cuaderno cuáles sustancias y cuáles magnitudes se involucraron en la experimentación que realizó. Escribe tu opinión sobre el proceder del rey Heirón y coméntala con algunos compañeros.

### Entendemos por...

**Antigüedad** lo referente a la edad antigua, que es el período histórico comprendido entre la invención de la escritura y la caída del Imperio Romano de Occidente.

### Diversión matemática

#### Galletas

Para hacer galletas se necesitan 3 tazas de harina.

Sólo tengo un recipiente que mide 2 tazas y otro que mide 7, y ninguno tiene marcas.

¿Cómo medir 3 tazas exactas con esos recipientes?

Diviértete intentándolo con tus compañeros.



### Día a día

#### Tsunami en cifras

Japón, palabra que significa literalmente: 'el país del origen del sol' Nippon-koku, es un país insular del este de Asia.

Está ubicado entre el océano Pacífico y el mar del Japón, al este de China, Rusia y la península de Corea. Japón está formado por cuatro islas principales:

Honsh, Hokkaid, Ky sh y Shikoku, que forman el 97% de la superficie total del país, y por otras 6,848 islas menores adyacentes.

Tiene una población de 127 millones de personas.

El 11 de marzo de 2011 se produjo un terremoto de 8.9 en la escala Richter, lo que le da el terrible título de ser uno de los más fuertes del último siglo.

Su magnitud equivaldría a la explosión de 240 millones de toneladas de TNT.

Cinco minutos más tarde un maremoto asolaba la costa con olas de 10 metros de altura que viajaban a una velocidad de entre 500 y 800 kilómetros la hora.

Los desaparecidos y fallecidos se cuentan por miles. Observa las mediciones que se realizan en el escrito.



## Tema 2. Realizo mediciones y cálculos de longitud



### Indagación

Imagina cuánto mide el grosor de la hoja de un libro. ¿Podrías medirlo con una regla, escuadra o cinta métrica?

Inténtalo y verás que tal vez no podrás hacerlo directamente.

Prueba el siguiente método indirecto.

Toma un paquete de 100 hojas de un libro o cuaderno, presiónalas bien y mide ese grosor.

Luego en tu cuaderno, divide esa medida entre 100 y habrás obtenido aproximadamente, la medida del grosor de una hoja.

En toda medición que una persona realiza, es posible que haya algún error, por más cuidado que se tenga al medir.

Compara el resultado de tu trabajo con unos 4 o 6 compañero(as). ¿A todos les dio lo mismo? Si no te ha dado lo mismo que a otro compañero(a) revisen primero sus valores y sus divisiones, después busquen las razones por las cuales no la da lo mismo.

Discutan y hagan cada uno en su cuaderno un informe de la experiencia realizada.

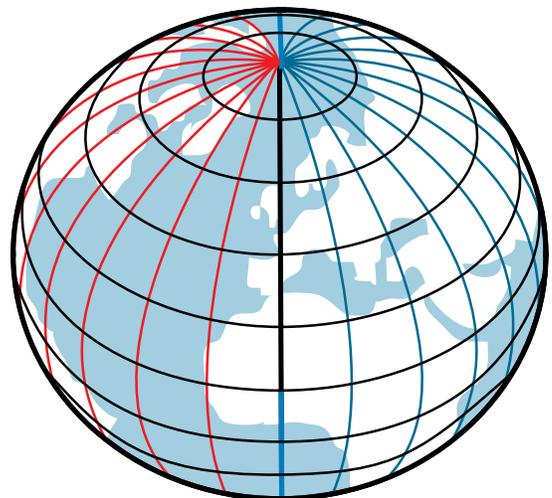


### Conceptualización

Medir es una actividad que el hombre realiza frecuentemente. Existen diferentes propiedades físicas que pueden medirse, como por ejemplo la longitud.

Antiguamente se utilizaba en los diferentes países y aún en las regiones de un mismo lugar una gran variedad de medidas, lo que dificultaba principalmente las transacciones comerciales.

Debido a esto, en 1790, el matemático Talleyrand llamó la atención de la Asamblea Nacional Francesa para que buscara un sistema uniforme de medidas.



Esta Asamblea, después de designar una comisión de cinco miembros para efectuar los estudios necesarios, adoptó el “Sistema Métrico Decimal”.

En el Sistema métrico decimal, la unidad básica para medir las longitudes es el metro, que se representa con el símbolo m.

El metro se definió en esa época como, aproximadamente, la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre; esta distancia se grabó en una regla de platino e iridio y se conoció como metro patrón, el cual está depositado en la oficina de pesas y medidas de Sévres, Francia.

Se llama Sistema por ser un conjunto de medidas relacionadas, Métrico porque la unidad fundamental es el metro y Decimal porque las medidas aumentan y disminuyen en potencias de 10.

Hoy se define el metro en función de la longitud de onda de la luz emitida por un isótopo del Kriptón.

Un metro equivale a 1,650,763.73 longitudes de onda de esta luz.

Como el metro no siempre resulta práctico para medir longitudes, pues hay unas mayores y otras menores, se utilizan sus múltiplos o submúltiplos para efectuar dichas mediciones.

Los nombres de los múltiplos del metro tienen prefijos griegos como:

- **Deca** que significa **10** veces el metro.
- **Hecto** que significa **100** veces el metro.
- **Kilo** que significa **1,000** veces el metro.
- **Miria** que significa **10,000** veces el metro.

Los nombres de los submúltiplos del metro tienen prefijos latinos como:

- **deci** que significa **décima** parte del metro.
- **centi** que significa **centésima** parte del metro.
- **mili** que significa **milésima** parte del metro.
- **micra** o **micrón** que significa **millonésima** parte del metro.

Estas unidades aumentan o disminuyen en agrupamientos de 10 en 10 como el sistema de numeración decimal.

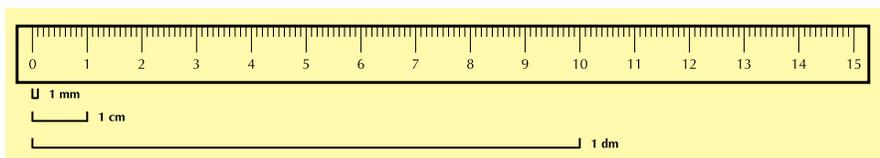
Estudia el cuadro siguiente, con algún compañero.

	Nombre de la unidad	Símbolo	Equivalencia
Múltiplos	Miriámetro	Mm	10,000 m
	Kilómetro	Km	1,000 m
	Hectómetro	Hm	100 m
	Decámetro	Dm	10 m
	metro	m	1 m
Submúltiplos	decímetro	dm	$\frac{1}{10}$ m = 0.1 m
	centímetro	cm	$\frac{1}{100}$ m = 0.01 m
	milímetro	mm	$\frac{1}{1,000}$ m = 0.001 m
	micra o micrón	$\mu\text{m}$	$\frac{1}{1,000,000}$ m = 0.001 m

Los múltiplos se utilizan para medir longitudes grandes como el largo y ancho de un río o de una carretera, la distancia entre dos ciudades o pueblos, etcétera.

Los submúltiplos se utilizan en la medida de objetos pequeños, por ejemplo, el largo o grosor de un lápiz, el largo de unas tijeras, el espesor de un libro, etcétera.

Con los instrumentos de medida como el metro, la cinta métrica y la regla graduada, se pueden apreciar los submúltiplos del metro (dm, cm, mm) y las relaciones que guardan entre sí.

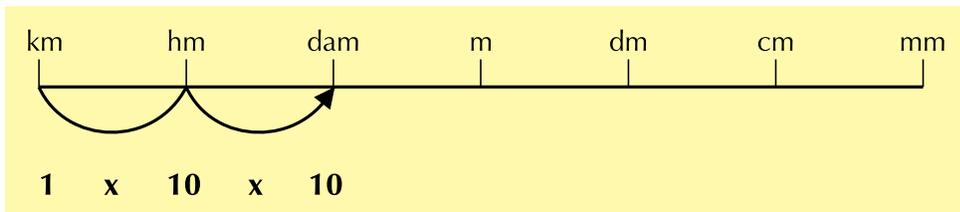


Al igual que en el sistema de numeración decimal, las unidades de longitud del Sistema Métrico Decimal aumentan o disminuyen en agrupamientos de 10 en 10, es decir, diez unidades de un orden inferior forman una unidad de un orden inmediato superior, por lo tanto:

<b>Diez metros forman un decámetro</b>	$10 \text{ m} = 1 \text{ Dm}$
<b>Un metro es la décima parte del decámetro</b>	$1 \text{ m} = \frac{1}{10} \text{ Dm}$
	$1 \text{ m} = 0.1 \text{ Dm}$
<b>Diez decámetros forman un hectómetro</b>	$10 \text{ Dm} = 1 \text{ Hm}$
<b>Un decámetro es la décima parte del hectómetro</b>	$1 \text{ Dm} = \frac{1}{10} \text{ Hm}$
	$1 \text{ Dm} = 0.1 \text{ Hm}$
<b>Diez hectómetros forman un kilómetro</b>	$10 \text{ Hm} = 1 \text{ Km}$
<b>Un hectómetro es la décima parte del kilómetro</b>	$1 \text{ Hm} = \frac{1}{10} \text{ Km}$
	$1 \text{ Hm} = 0.1 \text{ Km}$

### ¿Cómo encontrar la equivalencia de unidades mayores a menores?

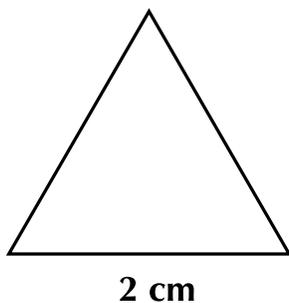
En las unidades de longitud ordenadas de mayor a menor puede observarse cuántos lugares hay del **km** al **dam**.



Hay **2** lugares, hacia la derecha y para llegar a la equivalencia se multiplican los km por 2 veces 10.

Entonces  $1 \times 10 \times 10 = 1 \times 10^2 = 1 \times 100 = 100$ , por lo tanto,  $1 \text{ km} = 100 \text{ dam}$ .

### Perímetro del triángulo equilátero



Por definición

$$P = l_1 + l_2 + l_3$$

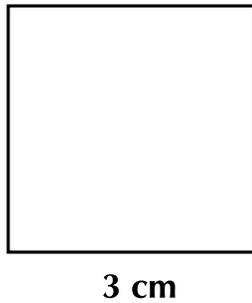
$$P = 2 \text{ cm} + 2 \text{ cm} + 2 \text{ cm}$$

$$P = 3 \text{ veces } 2 \text{ cm}$$

$$P = 3 (2 \text{ cm}) = 6 \text{ cm}$$

Generalizando, se tiene que el perímetro de un triángulo equilátero se obtiene con el producto de 3 por el valor de uno de sus lados.  $P = 3 l$

### Perímetro del cuadrado



Por definición

$$P = l_1 + l_2 + l_3 + l_4$$

Sustituyendo

$$P = 3 \text{ cm} + 3 \text{ cm} + 3 \text{ cm} + 3 \text{ cm}$$

En general, el perímetro del cuadrado se calcula con la fórmula  $P = 4l$  en donde  $P$  es el perímetro del cuadrado y  $l$  es la medida de la longitud del lado.

Como los lados son de igual medida, se expresa como producto.

$$P = 4 \text{ veces } 3 \text{ cm}$$

$$P = 4 (3 \text{ cm}) = 12 \text{ cm}$$

### Perímetro de polígonos equiláteros

Se dan dos polígonos, para calcularles su perímetro.

Uno es un pentágono regular de lado 4,2 cm.

Y el otro es un Hexágono regular de lado 3,7 cm.

Por definición

$$P_A = 4.2 \text{ cm} + 4.2 \text{ cm} + 4.2 \text{ cm} + 4.2 \text{ cm} + 4.2 \text{ cm}$$

$$P_B = 3.7 \text{ cm} + 3.7 \text{ cm}$$

Como los lados son de igual medida se expresa como producto.

$$P_A = 5 (4.2 \text{ cm}) = 21 \text{ cm} \quad P_B = 6 (3.7 \text{ cm}) = 22.2 \text{ cm}$$

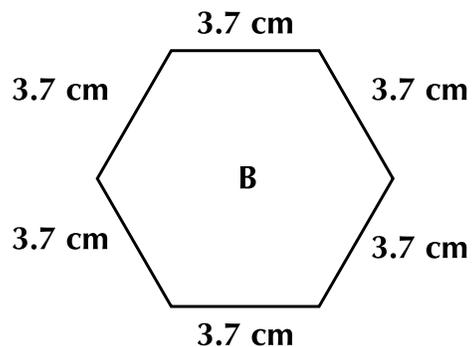
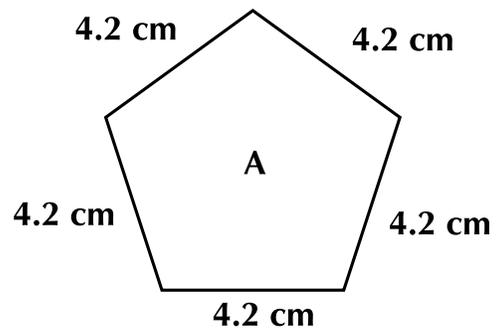
Generalizando:

Pentágono

$$P = 5 \ell$$

Hexágono

$$P = 6 \ell$$

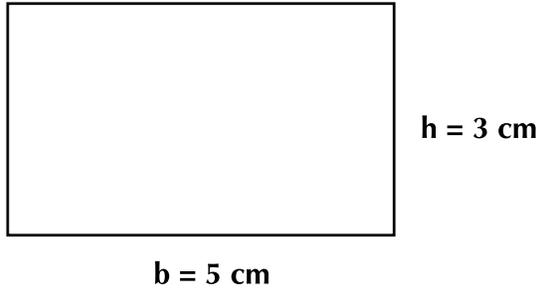


Concluyendo se puede afirmar que:

***El perímetro de figuras geométricas equiláteras se obtiene multiplicando el número de lados por la longitud de uno de ellos.***

### Perímetro del rectángulo

1. Calculemos el perímetro o longitud del contorno del rectángulo siguiente:



$$P = b + b + h + h$$

$h = 3 \text{ cm}$  Sustituyendo tenemos:

$$P = 5 \text{ cm} + 5 \text{ cm} + 3 \text{ cm} + 3 \text{ cm}$$

Como hay sumandos iguales se tiene que:

$$P = 2(\text{cm}) + 2(3 \text{ cm})$$

$$b = 5 \text{ cm}$$

Generalizando, se tiene:

$$P = 2b + 2h$$

2. ¿Cuántos metros de alambre se necesitan para cercar con una vuelta, un terreno con las del terreno real dimensiones indicadas en el dibujo?  
Al observar las unidades de cada lado se nota que no son de la misma especie, por lo que hay que convertir los dam a m o los m a dam, para poder hacer las operaciones.

Esta es una representación del terreno real



Sabemos que 2 dam = 20m.  
Por lo tanto, los datos son:

$$b = 30 \text{ m}$$

$$h = 20 \text{ m}$$

Como es un terreno rectangular, su perímetro se obtiene con la fórmula:

$$P = 2b + 2h$$

Sustituyendo, se tiene:  $P = 2(30 \text{ m}) + 2(20 \text{ m})$

$$P = 60 \text{ m} + 40 \text{ m} = 100 \text{ m}$$

Se necesitan 100 m de alambre para cercar el terreno dándole 1 vuelta.

Concluyendo, se afirma que:

**Para obtener el perímetro de figuras geométricas es necesario:**

1. Conocer la longitud de cada uno de sus lados.
2. Trabajar con unidades de la misma especie y en caso contrario, hacer la conversión de una a la otra.
3. Decidir el procedimiento más conveniente si es una figura equilátera o si existen algunos lados de igual medida, o simplemente sumar todas las medidas de los lados.
4. Expresar el resultado con la unidad de longitud respectiva (km, hm, dam, m, dm,...).



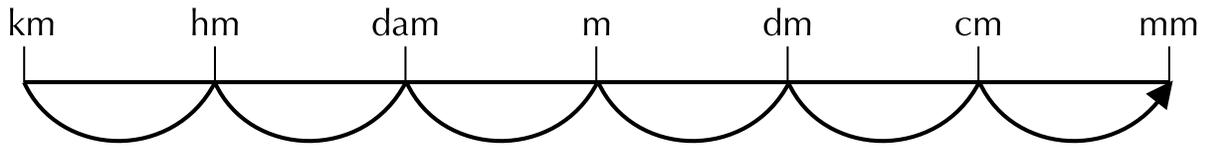
### Aplicación

Trabaja en equipo y en tu cuaderno, efectúa las actividades siguientes, compara y comenta tus respuestas con el grupo y tu profesor. Si hay errores, corrige Individualmente.

#### Parte A

Determina cuál operación debe realizarse en cada conversión siguiente.

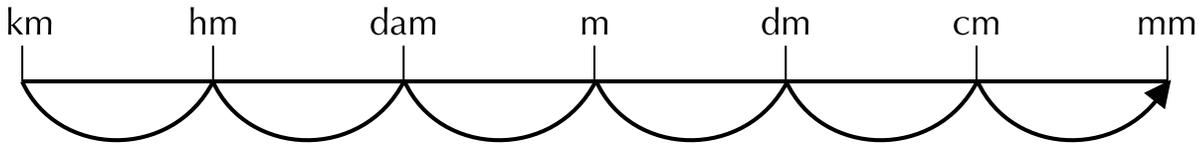
Ejemplo: Para expresar km en dam tenemos:



km a dam **multiplicación** por convertirse de **mayor a menor**.

1. cm a m \_\_\_\_\_ por convertirse de \_\_\_\_\_
2. dm a cm \_\_\_\_\_ por convertirse de \_\_\_\_\_
3. dam a mm \_\_\_\_\_ por convertirse de \_\_\_\_\_

Escribe el número de lugares que hay de una unidad a otra, y entre cuánto se debe multiplicar o dividir. Observa el ejemplo:



Para pasar de km a mm: se cuentan 6 lugares a la derecha, es decir, se multiplica por  $10^6 = 1,000,000$ .

4. cm a dam: \_\_\_\_\_ lugares. Se multiplica por \_\_\_\_\_
5. dm a dam: \_\_\_\_\_ lugares. Se multiplica por \_\_\_\_\_

Efectúa las siguientes conversiones:

6. 484 hm a dm
7. 64,784 mm a dam
8. 172,320 cm a km
9. 25 km a mm
10. 328 cm a dam
11. 457.6 dm a dam

- d. La distancia entre dos pueblos.
- e. La longitud de un río.
- f. La longitud de una hormiga.
- g. El largo de una casa.
- h. El diámetro de un tubo.
- i. El largo de un tornillo.

Compara la solución de tu ejercicio con la de otro grupo y corrige en si necesario.

**Parte B**

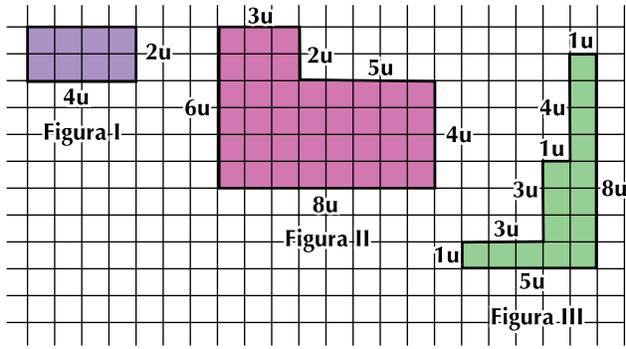
1. Escribe la unidad de longitud más adecuada para medir lo que se indica en cada caso.

- a. La estatura de un bebé.
- b. El largo del salón.
- c. La altura de un edificio.

2. En 5 kilómetros, ¿cuántos decámetros hay?
3. La finca de José tiene un perímetro de 484 hm, él quiere saber a cuántos dm equivalen.
4. La distancia desde mi casa hasta el colegio es de 15 cuabras. Si cada cuadra mide 1 Hm, ¿A cuántos Km de mi colegio queda mi casa?
5. Averigua cuántos metros de alambrado se necesitan para cercar un terreno rectangular de 120 m de frente y 3 Hm de fondo.

Los ejercicios **6 a 10** se resuelven con base en la figura siguiente obsérvala detenidamente.

Como se han tomado las medidas en una unidad de longitud llamada **u**, entonces las respuestas deberás darlas en **u**.



6. Calcula el contorno de la figura I
7. Calcula el contorno de la figura II
8. Calcula el contorno de la figura III
9. ¿Cuál figura tiene mayor perímetro?
10. ¿Cuál figura tiene menor perímetro?

### Entendemos por...

**Contorno** el conjunto de líneas que limitan o bordean una figura o una composición.

Por ejemplo hablamos del contorno de una mesa cuando hablamos de la forma de su superficie.

### Diversión matemática

#### El Problema del Cordón

¿Cómo deben ser atadas las zapatillas?

Esta pregunta aparentemente simple, que se nos presenta en la vida diaria.

Por lo menos hay tres maneras de atar las zapatillas:

Zigzag americano (o estándar), Europeo recto y el de zapatería.

El estilo del cordón depende de la estética y la comodidad.

Los patrones del cordón pueden ser complejos y diversos patrones requieren diversas longitudes del cordón.

Uno puede preguntarse: ¿qué patrón del cordón requiere los cordones más cortos?. En el problema del cordón, usted tiene que encontrar la trayectoria más corta desde el ojal superior en un lado, al ojal superior en el otro lado, pasando a través de cada ojal apenas una vez.

Tomado de: <http://www.soarem.org.ar/Documentos/31%20Moriena.pdf>

Fíjate que los tres estilos requieren diferentes longitudes de cordón. Responde la pregunta del problema del cordón y compárala con la de algunos(as) compañeros.

### Día a día

#### Ríos importantes de Colombia

El río Magdalena es el río de la Patria. Su longitud total, desarrollada de sur a norte, entre las cordilleras Central y Oriental, es de 1,558 km, de los cuales son navegables 1,290 Km, interrumpidos en el salto de Honda.

El Magdalena es el río interandino de mayor extensión en Suramérica, arrojando al mar 8,000 metros cúbicos cada seg. Su cuenca tiene una extensión de 256,622 km<sup>3</sup>, y recibe las aguas de cerca de 500 afluentes por ambas orillas, así como, más de 5,000 arroyos y quebradas. Sirve de lazo de unión entre los diversos pueblos de los territorios que recorre, desde su nacimiento en la laguna de la Magdalena, en el páramo de las Papas (Macizo Colombiano) a 3,685 m de altura, hasta su desembocadura, en las Bocas de Ceniza en el mar Caribe.

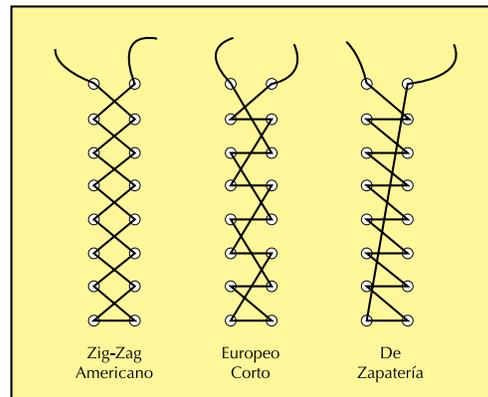
Su principal puerto es Barranquilla y le siguen en importancia los puestos de La Dorada, Puerto Berrío, Barrancabermeja, Puerto Wilches, Magangué, El Banco y Girardot.

El Magdalena está comunicado con el puerto marítimo de Cartagena a través del canal del Dique, obra humana de 105 km de longitud.

Por su parte, el río Cauca es el más importante entre los muchos afluentes del Magdalena, con una longitud total de 1,350 km, de los cuales son navegables un poco más de 620 km.

El Cauca nace también en el Macizo Colombiano, en la laguna del Buey. Corre entre las cordilleras Central y Occidental y tributa sus aguas en el Magdalena, a la altura del departamento de Bolívar, después de regar una hoya hidrográfica cercana a los 63,300 km<sup>2</sup> de superficie, en la cual se destaca su parte media como una de las zonas más fértiles del país, en territorio del departamento del Valle del Cauca.

Tomado de: <http://www.todacolombia.com/geografia/vertientescolombia.html>

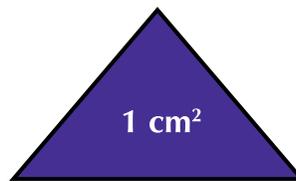
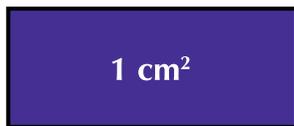
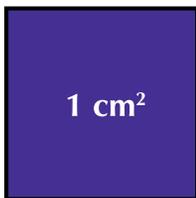


## Tema 3. Realizo mediciones y cálculos de áreas



### Indagación

En cursos anteriores se ha estudiado que el área es el resultado de medir la extensión de una superficie. Por lo tanto, para conocer el área de una figura se requiere saber cuántos patrones o unidades de medida caben en ella.



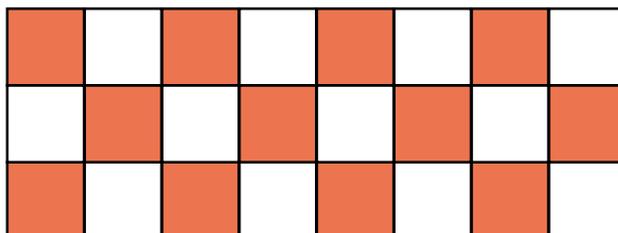
Vamos a realizar algunos conteos de áreas y para ello acordarnos que las figuras anteriores, son patrones que tienen la misma unidad de medida por ejemplo, cada uno vale  $1 \text{ cm}^2$ .

En tu cuaderno, dibuja una figura que represente el piso de tu salón de clases e intenta medir su superficie tomando una de las tres figuras como unidad de área. Prueba con cada una de la unidades dadas arriba y decide cuál puede ser la que dé un resultado más preciso.

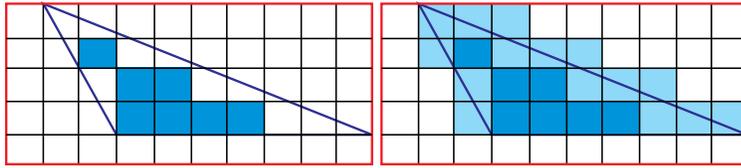


### Conceptualización

Una unidad de medida adecuada para recubrir es una pequeña región cuadrada. Así que un procedimiento para calcular el área consiste en realizar el conteo de cuadros. Para medir la extensión de superficies se puede usar una cuadrícula como la que aparece a continuación, o sea, una extensión regular de regiones unitarias cuadradas, sin separación.



Para usar una cuadrícula en el cálculo del área de una región dada, se procede a dibujar la figura sobre ella. Así:



Contando se puede verificar que en el triángulo de la izquierda están contenidos siete cuadros completos, los cuales están sombreados y hay unos pedazos de cuadro, que pertenecen al triángulo y que no hemos sombreado. Entonces, podemos afirmar que el área de la figura es algo más que 7 unidades. Lo que se ha realizado es una estimación del área del triángulo, calculada por defecto.

Si se cuenta en la cuadrícula de la derecha, hay quince cuadros más, que también están sombreados y que cubren el resto de la superficie. Luego, la región cubierta es de  $7 + 15$ , es decir, 22 unidades, lo que muestra que el área de la región tiene algo menos que 22, porque hay partes de los cuadros que están por fuera del triángulo. Así que 22 unidades es una estimación del área del triángulo, calculada por exceso. Con esta estimación se sabe que el área del triángulo está entre 7 y 22 unidades.

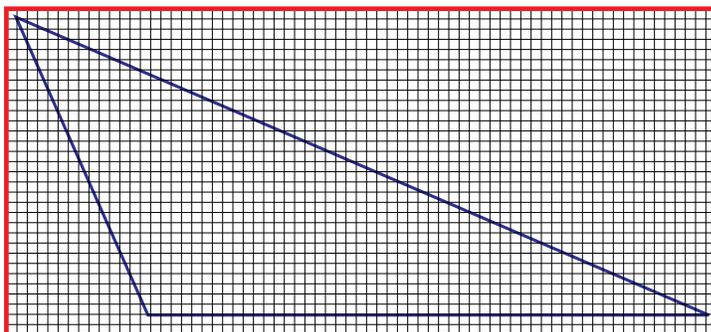
Como la diferencia entre las dos estimaciones es de 15 unidades, la medida no es precisa. Los dos resultados del conteo (7 y 22) son aproximados. Pero, en ambos, el error de medición es considerable.

Una aproximación más precisa se puede lograr utilizando una unidad de medida menor.

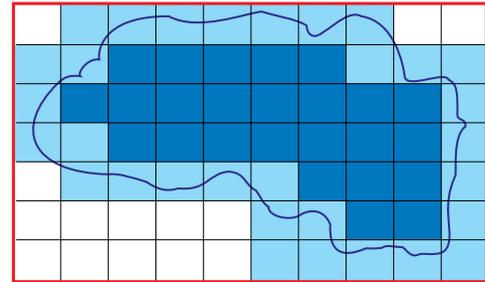
Al utilizar el papel milimétrico, la aproximación será más precisa, pues casi toda la superficie del triángulo estará cubierta por regiones unitarias “completas”.

En este caso, al hacer la estimación se encuentra que el área del triángulo está entre 702 y 770 unidades.

La cuadrícula se puede usar también para calcular de manera aproximada el área de una región de contorno irregular.



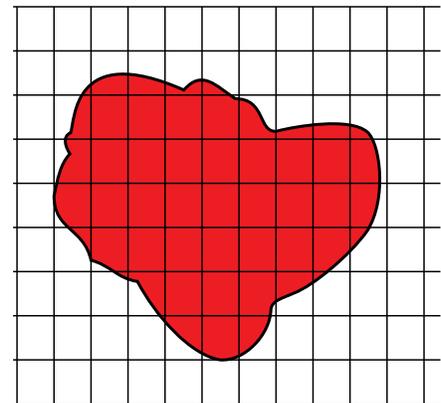
En la figura, se puede apreciar que en la región sombreada hay 25 unidades y en la que está levemente sombreada hay 31 unidades. Como  $25 + 31 = 56$ , se sabe que el área de la región está entre 25 y 56 unidades.



Como ya se ha dicho, una mayor aproximación se logra usando una cuadrícula más pequeña y con el mismo método de conteo.

En la práctica, esta forma de obtener el área es muy laboriosa y tiene limitaciones muy notorias por el margen de error, que da como resultado una mayor o menor precisión en el cálculo del área de los dibujos. Por lo tanto, será necesario realizar otra forma de cálculo que permita resultados más precisos y que se obtengan de manera más rápida.

Ahora, copia la figura en tu cuaderno y aplica este método de estimación por defecto y por exceso para dar un valor aproximado del área de la figura siguiente.



Compara tu trabajo con algunos compañeros y acepta si te has equivocado.

## Área y superficie

Generalmente conocemos expresiones como: “El portero recoge la pelota dentro de su área”.

“Dejó el automóvil fuera del área de estacionamiento”. “El polvo se acumula en la superficie de los muebles”.

En el lenguaje cotidiano, algunas veces ocurre que se emplean como sinónimos los vocablos área y superficie. Sin embargo, en matemáticas tienen significados diferentes, por lo cual es necesario precisar cada uno de ellos.

Cuando se menciona la parte del papel sobre la cual se imprime o la parte de un mueble en la que se acumula el polvo se hace referencia a la superficie. La superficie es la parte de un cuerpo que se puede ver o tocar.

**Superficie es la región plana interior delimitada por un polígono o una curva cerrada.**

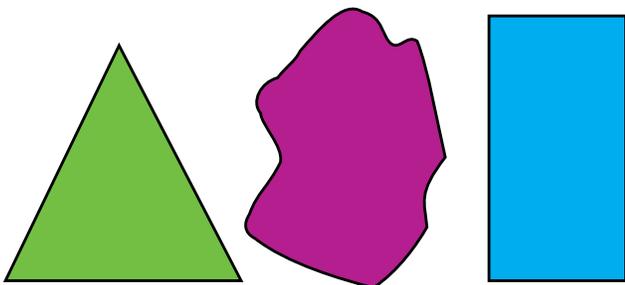
Las superficies tienen dos dimensiones. La representación de una superficie se hace por medio de las líneas que forman su contorno.

Si se habla de la extensión de un terreno, de la medida de la cubierta de una mesa, del interior de un polígono, etcétera, se está haciendo referencia al área de esa superficie.

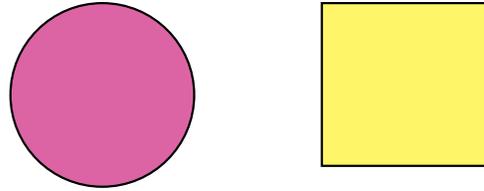
**El área es el resultado de la medida de la extensión de una superficie.**

Para obtener el área de una superficie, es necesario llenarla completamente con figuras congruentes (de la misma forma y medida). La figura que se elija se denomina patrón de área.

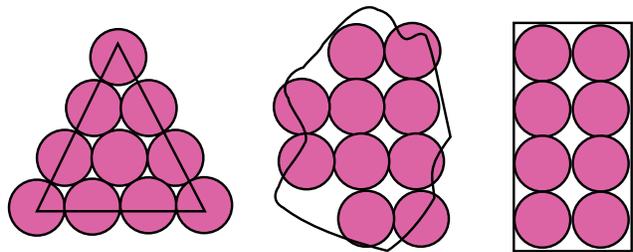
Se quieren medir las extensiones de las superficies (regiones) siguientes.



Para tal fin, se eligen arbitrariamente los siguientes patrones de medida:

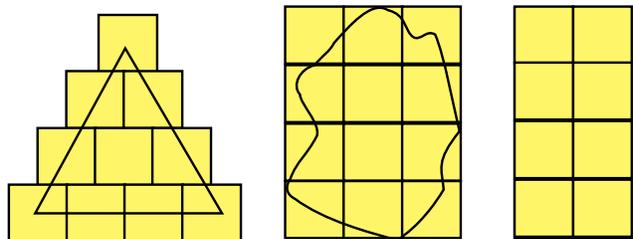


a. Se cubre cada región con el primer patrón de medida.



Al cubrir las tres regiones con pequeñas regiones circulares congruentes, siempre habrá partes que permanezcan descubiertas.

b. Se cubre cada región con el segundo patrón de medida.

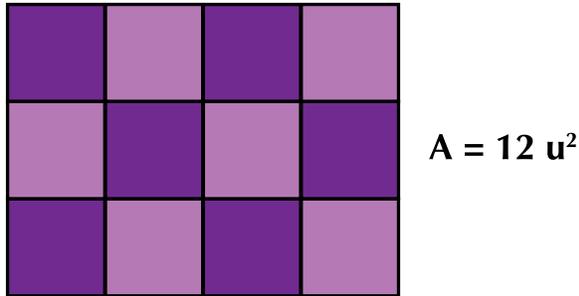


Entonces, se aprecia que siempre es posible cubrir completamente cualquier región, si se emplean suficientes regiones cuadradas.

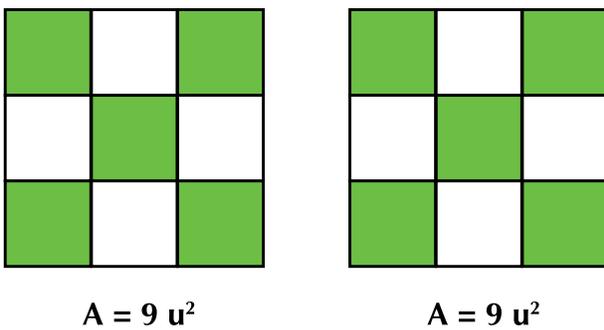
Debe considerarse que el patrón unidad cuadrado no es el único con esta propiedad de cubrimiento, pero sí tiene la ventaja de ser el patrón cuya forma es simple. Es por esta razón que el área de una superficie se proporciona en unidades cuadradas ( $u^2$ ).

**Las propiedades básicas del área son:**

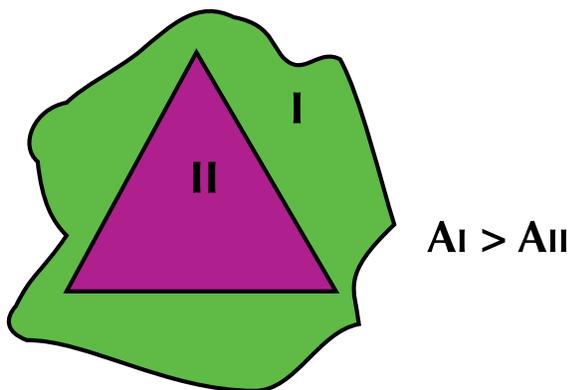
1. El área de una superficie se expresa con un número y su unidad correspondiente.



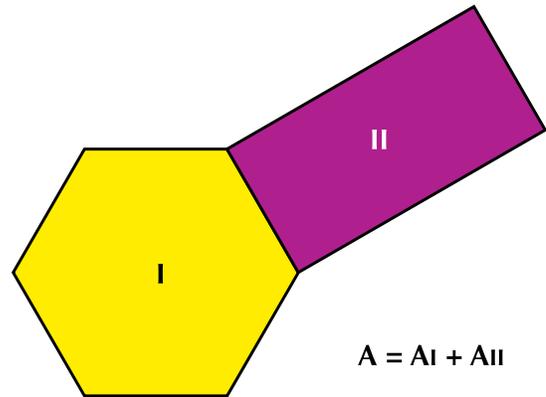
2. Dos superficies congruentes tienen la misma área.



3. El área de una superficie es mayor o igual que el área de cualquier región que contenga.



4. El área de la unión de dos superficies diferentes es la suma de las áreas de esas superficies.



Conviene insistir en que el área de una superficie no se da en unidades lineales, sino en unidades cuadradas, porque la superficie tiene dos dimensiones que son largo y ancho.

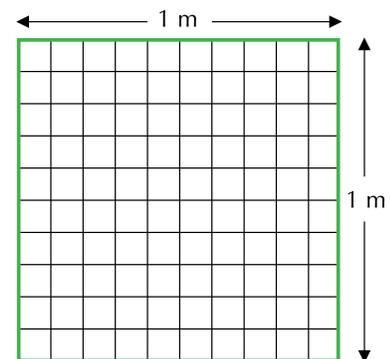
**Medidas de área**

Lo más conveniente es utilizar una pequeña figura cuadrada para hallar el área de una región.

También es necesario que haya una unidad de medida que sea única para que las áreas sean comprendidas de igual manera por todos.

La unidad fundamental de medida para las áreas es el metro cuadrado ( $m^2$ ), que se acostumbra representar por un cuadro de un metro de longitud por lado.

Obsérvese con atención la figura siguiente, que representa un metro cuadrado. Como cada lado está dividido en 10 segmentos congruentes, cada uno de ellos representa un decímetro, y cada cuadro pequeño es un decímetro cuadrado.



Entonces, un metro cuadrado tiene 100 decímetros cuadrados.

$$1 \text{ m}^2 = 100 \text{ dm}^2$$

Si se considera que los valores de las medidas de longitud aumentan o disminuyen en potencias de 10 y que  $10^2 = 10 \times 10 = 100$ , resulta lógico pensar que el valor de las medidas de área aumenta o disminuye en agrupamientos de 100 en 100.

**Cada unidad de área es 100 veces mayor que la inferior y 100 veces menor que la superior. Por ejemplo: 1 m<sup>2</sup> es 100 veces mayor que 1 dm<sup>2</sup> y 100 veces menor que 1 dam<sup>2</sup>.**

Para medir la extensión de grandes superficies se emplean los múltiplos del metro cuadrado, que son los siguientes:

- Un decámetro cuadrado:  $1 \text{ dam}^2 = 100 \text{ m}^2$ .
- Un hectómetro cuadrado:  $1 \text{ hm}^2 = 100 \text{ dam}^2 = 10,000 \text{ m}^2$ .
- Un kilómetro cuadrado:  $1 \text{ km}^2 = 100 \text{ hm}^2 = 10,000 \text{ dam}^2 = 1,000,000 \text{ m}^2$ .
- Cabe mencionar que un hectómetro cuadrado ( $\text{hm}^2$ ), equivale a una hectárea (ha), es decir,  $10,000 \text{ m}^2$ .
- Un decámetro cuadrado ( $\text{dam}^2$ ), equivale a un área (a).
- Un metro cuadrado ( $\text{m}^2$ ), equivale a una centiárea (ca).

La **hectárea**, el **área** y la **centiárea** son **medidas de área que se llaman agrarias** porque se usan en el campo, con ellas se miden grandes terrenos como fincas o haciendas.

Cuando se miden superficies más pequeñas que el metro cuadrado, se emplean los submúltiplos, que son: el decímetro cuadrado ( $\text{dm}^2$ ), el centímetro cuadrado ( $\text{cm}^2$ ) y el milímetro cuadrado ( $\text{mm}^2$ ).

- $1 \text{ m}^2 = 100 \text{ dm}^2 = 10,000 \text{ cm}^2 = 1,000,000 \text{ mm}^2$ .
- $1 \text{ dm}^2 = 100 \text{ cm}^2 = 10,000 \text{ mm}^2$ .
- $1 \text{ cm}^2 = 100 \text{ mm}^2$ .

Cuando se conoce una unidad de medida para las áreas, como el metro cuadrado, múltiplos y submúltiplos, no es necesario obtener las áreas por conteo, pues se pueden calcular en forma indirecta a partir de la medida de sus dimensiones (largo y ancho).

### Cálculo del área de cuadrados y rectángulos

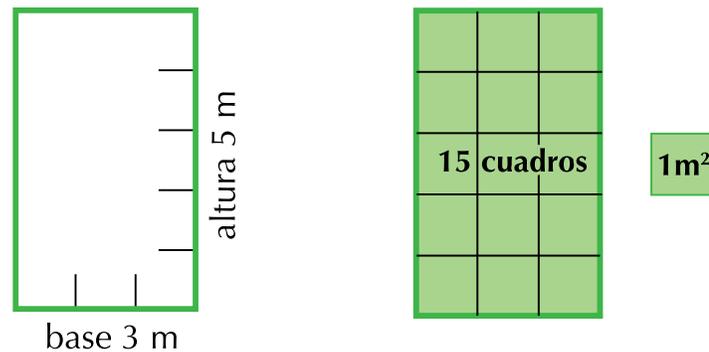


La Asociación de padres de familia de una escuela va a pintar una pared rectangular que mide 5 m de largo y 3 m de ancho.

La información que posee al respecto es que con 1 litro de pintura se pueden pintar 6 m<sup>2</sup> de la pared.

¿Cómo pueden saber qué cantidad de pintura se requiere para pintar toda la pared?

Lo primero que se necesita es conocer la medida de la extensión de la superficie que se va a pintar, es decir, el área que tiene.



Para obtener su área, en este caso una región rectangular, se requieren las medidas de su base y su altura. Observa la figura adjunta, que es una representación de la pared:

$$5 \times 3 = 15$$

Con estas medidas, se puede verificar:

Al cuadricular el rectángulo el número de cuadros que resulta (15), coincide con el producto de la base por la altura.

Estos cuadros representan la unidad de medida, y en este caso son metros cuadrados.

La palabra área se representa simbólicamente con la letra A, entonces  $A = (3 \text{ m}) \times (5 \text{ m}) = 15 \text{ m}^2$ .

Además, en el lenguaje simbólico de las matemáticas, la base se representa con  $b$ , y la altura con  $h$ .

Por lo tanto:

**El área de un rectángulo es igual al producto de su base por su altura. La fórmula es  $A = b \times h$ .**

Volviendo al problema de la pintada de la pared de la escuela:

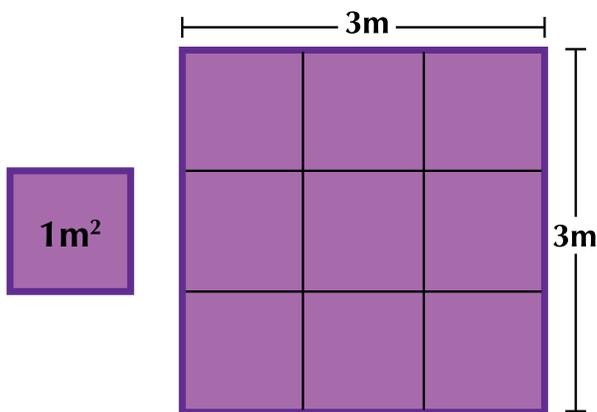
El área de la pared que se va a pintar es de  $15 \text{ m}^2$ . Con un litro de pintura se cubren  $6 \text{ m}^2$ , entonces, si se divide  $15 \div 6$ , esto es 2.5 litros.

$$\begin{array}{r} 15 \quad | \quad 6 \\ 30 \quad | \quad 2.5 \\ \hline 0 \end{array}$$

El resultado de la división significa que se requieren 2,5 litros de pintura para cubrir la pared de área  $15 \text{ m}^2$ .

La fórmula  $A = b \times h$  (área igual a base por altura) se aplica para obtener el área de cualquier rectángulo.

En cambio, si se trata del cuadrado, como los lados son congruentes, no tiene sentido considerar base y altura, sino que simplemente se mide un lado y el número obtenido se multiplica por sí mismo para obtener el área, como se muestra a continuación.



$$\text{Área} = \text{lado} \times \text{lado} \\ (3\text{m}) \times (3\text{m}) = 9\text{m}^2$$

Es necesario tener presente que al multiplicar una cantidad por sí misma ésta queda elevada a la

segunda potencia o sea al cuadrado. También, que el área se representa con  $A$  y el lado con  $l$ . Como lado por lado sustituye a base por altura, se tiene:

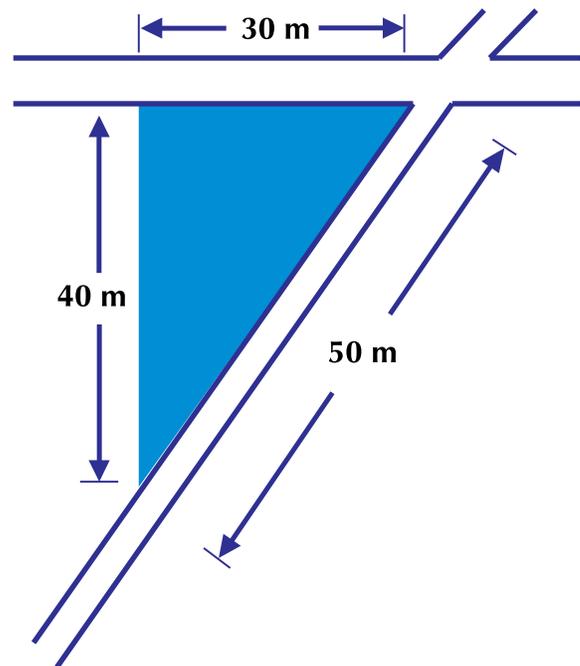
**El área de un cuadrado es igual a la medida de un lado elevada al cuadrado. La fórmula es  $A = l^2$ .**

La fórmula  $A = l \times l = l^2$  (área A igual a lado por lado, igual a lado al cuadrado), se aplica para obtener el área de cualquier cuadrado.

### Cálculo del área de triángulos y polígonos

Analiza con un compañero o con tu profesor, la situación siguiente:

Una persona desea vender un terreno que tiene la forma que muestra la figura, a continuación.



Conoce el costo por cada  $\text{m}^2$ , pero ignora cuántos  $\text{m}^2$  tiene su terreno.

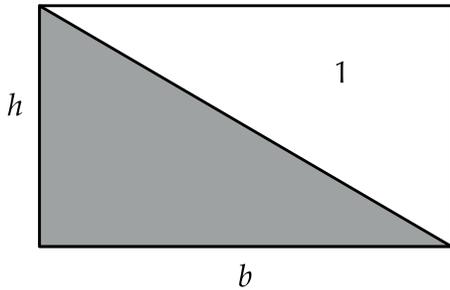
Para saberlo, es necesario encontrar una forma que permita calcular el área de una superficie triangular.

### Área del triángulo

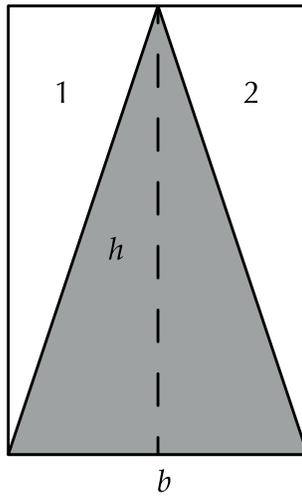
Considérense los rectángulos I, II y III y obsérvense los triángulos sombreados que contiene cada uno.

Nótese que la base y la altura de cada triángulo miden igual que la base y la altura del rectángulo que lo contiene.

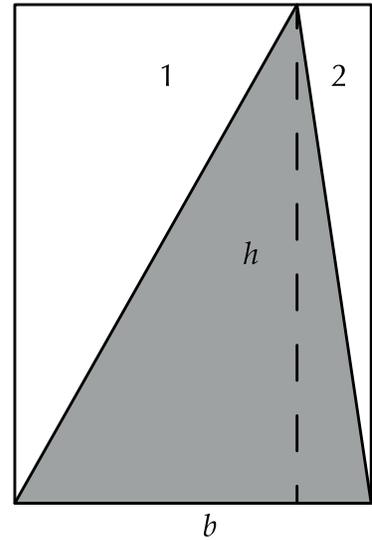
Rectángulo I



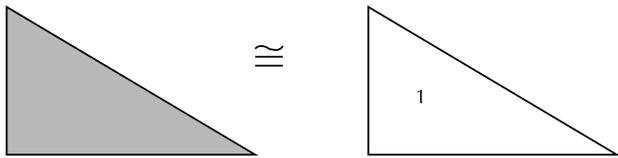
Rectángulo II



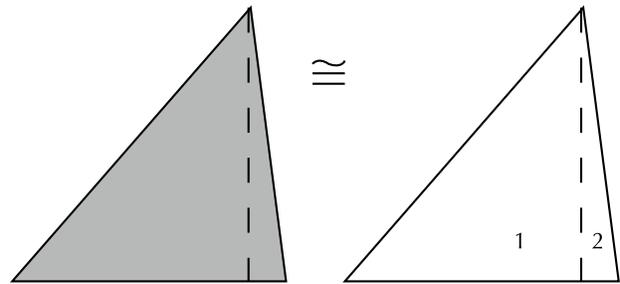
Rectángulo III



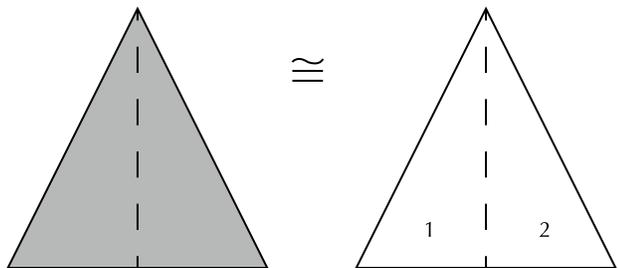
Se recorta el triángulo 1 del rectángulo I y se compara con su triángulo sombreado.



Haciendo lo mismo con los triángulos 1 y 2 del rectángulo III, se tiene:



Se recortan los triángulos 1 y 2 del rectángulo II, con ellos se forma un nuevo triángulo para compararlo con el sombreado.



En los tres casos puede observarse que los triángulos que se recortan forman otro que es congruente con el triángulo sombreado.

Cada rectángulo inicial contiene dos triángulos cuya base y altura es igual a la base y altura del rectángulo.

Por lo tanto, el área de uno de los triángulos es la mitad del área del rectángulo.

Esto es:

$$\text{Área del triángulo} = \frac{\text{Área del rectángulo}}{2}$$

Pero como Área del rectángulo = base por altura, entonces,

$$\text{Área del triángulo} = \frac{\text{base por altura}}{2}$$

Entonces puede concluirse que:

**El área del triángulo es igual a su base multiplicada por su altura y dividida entre 2.**

$$A = \frac{b \times h}{2} \quad \text{en donde} \quad \begin{array}{l} A = \text{área} \\ b = \text{base} \\ h = \text{altura} \end{array}$$

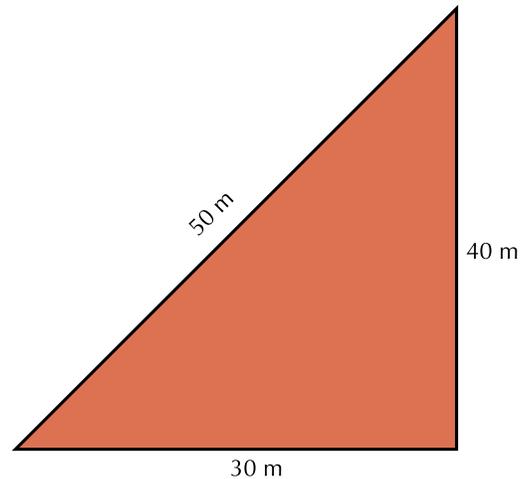
Analicemos la situación siguiente:

Jacinto recibió como herencia un terreno triangular como muestra la figura y calcula el área así:

Como el terreno tiene forma de triángulo rectángulo cuya base es 30 metros y altura 40 metros, entonces ordena los datos y con la fórmula del área del triángulo se da cuenta que el terreno heredado tiene un área de 600 metros cuadrados.

$$\begin{aligned} h &= 40 \text{ m} \\ b &= 30 \text{ m} \\ A &= \frac{b \times h}{2} \\ A &= \frac{30 \text{ m} \times 40 \text{ m}}{2} \\ A &= \frac{1,200 \text{ m}^2}{2} = 600 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

El terreno tiene un área de 600 m<sup>2</sup>.



### Área de polígono regular

Conociendo la forma de obtener el área del triángulo, resulta sencillo deducir la fórmula para calcular el área de polígonos regulares, dado que éstos pueden dividirse en triángulos congruentes.

Llámense polígonos regulares a aquellos que tienen sus lados y ángulos iguales.

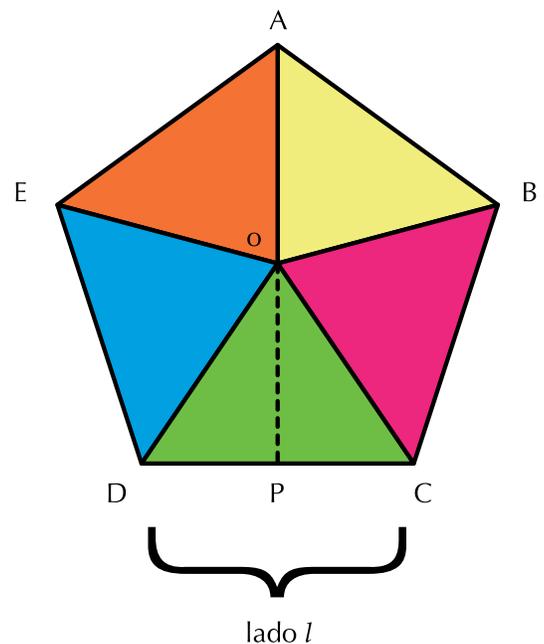
En este caso se considera un polígono regular de más de cuatro lados, puesto que la obtención del área del triángulo y el cuadrado está bien definida.

Sea el pentágono regular (polígono regular de 5 lados) cuyos vértices son ABCDE.

Se divide el pentágono ABCDE en cinco triángulos congruentes, siendo O el centro de la figura.

El área del polígono se obtiene si se multiplica el área de un triángulo por cinco.

Al triángulo DOC se le traza su altura OP, que es el segmento perpendicular que va del punto medio de un lado del polígono al centro de la figura, es decir, la apotema del polígono. La apotema OP del polígono es la altura de uno de los triángulos en que se divide el polígono regular.



$$\text{Área } \triangle DOC = \frac{b \times h}{2} = \frac{\text{lado del polígono} \times \text{apotema}}{2} = \frac{DC \times OP}{2}$$

Como DC es el lado del polígono que llamaremos *l*.

El área del polígono será igual a 5 veces el área del triángulo  $\triangle DOC$ , por lo tanto, la fórmula para calcular el área del pentágono regular es:

$$\text{Área del pentágono regular} = \frac{5 \times (l \times \text{apotema})}{2}$$

o

$$\text{Área del pentágono regular} = \frac{(5 \times l) \times \text{apotema}}{2} \text{ también.}$$

Pero  $(5 \times l)$  es el perímetro del pentágono regular, entonces, podemos decir que el área del pentágono regular es igual a multiplicar el perímetro por la apotema y dividir entre 2. En general, el área del polígono regular de cualquier número de lados es igual a semiperímetro (perímetro  $\div$  2) por apotema.

Si *P* es el perímetro del polígono regular y *a* es la apotema del polígono regular entonces, su área *A* será:

$$\text{Área del polígono regular} = A = \frac{P \times a}{2}$$

Se sabe que un polígono regular es aquel cuyos lados tienen la misma medida (además de tener sus ángulos iguales).

### Círculo y Circunferencia

El círculo puede considerarse como un polígono regular de infinito número de lados, cuyo perímetro es la longitud de su circunferencia y cuya apotema es el radio.

La **circunferencia** es la línea curva y cerrada, cuyos puntos equidistan de un punto interior llamado centro.

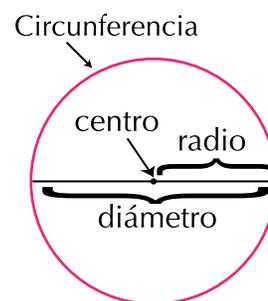
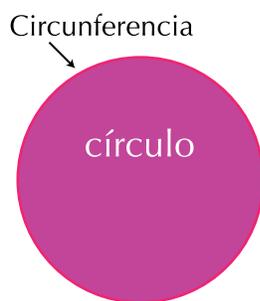
**Círculo** es la superficie plana limitada por la circunferencia.

El perímetro del círculo es igual a la longitud de la circunferencia, en donde:

El radio (*r*) de una circunferencia es la recta que une el centro con un punto cualquiera de la circunferencia.

El diámetro (*d*) es la recta que une dos puntos de la circunferencia pasando por el centro y su largo equivale a dos veces la longitud del radio ( $d = 2r$ ).

En un objeto circular de cualquier tamaño, si se adapta un hilo de longitud igual al diámetro y con él se mide la circunferencia, se verá que siempre



está contenido, aproximadamente, 3 veces  $\frac{1}{7}$ . Esta razón  $3\frac{1}{7}$  entre la longitud de la circunferencia (*c*) y la del diámetro (*d*) es constante  $3\frac{1}{7} = 3 + \frac{1}{7}$ :

$$1 \div 7 = 0.1416... \quad 3\frac{1}{7} = 3.1416...$$

Desde el rigor de las matemáticas, la relación entre la longitud de la circunferencia y el diámetro es un número especial, diferente de lo que tú conoces.

Dicho número se identifica con la letra griega

$$\pi \text{ (pi), es decir, } \frac{c}{d} = \pi$$

Una aproximación numérica, para efectos prácticos, de  $\pi$  se expresa como 3.14 o 3.1416 cuando se exige una mayor precisión.

La longitud de la circunferencia ( $c$ ) es entonces  $\pi \times 2r$  veces el diámetro, es decir,  $c = \pi \times d$ .

Como se sabe que  $d = 2r$ , se puede concluir que  $c = \pi \cdot d$  y  $c = \pi (2r)$ .

Las expresiones  $c = \pi d$  y  $c = 2 \pi r$  se utilizan indistintamente para la obtención de la longitud de la circunferencia, es decir, del perímetro del círculo, que es la longitud de la circunferencia.



### Aplicación

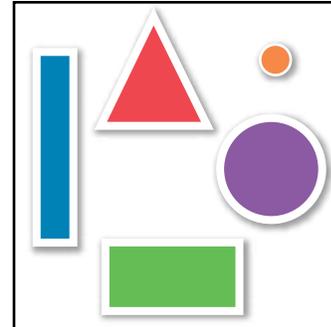
1. Calcula el número de árboles que pueden plantarse en un terreno rectangular de 32 m de largo y 30 m de ancho si cada planta necesita para desarrollarse 4 m<sup>2</sup>.
2. Calcula el número de baldosas cuadradas, de 10 cm, de lado que se necesitan para enlosar una superficie rectangular de 4 m de base y 3 m de altura.
3. Hallar el área de un triángulo rectángulo isósceles cuyos lados miden 10 cm cada uno.
4. Inventa un problema sobre cálculo de áreas.

### Entendemos por...

**Superficie** la extensión considerada en dos dimensiones: largo y ancho, es decir la superficie es bidimensional.

### Diversión matemática

Diviértete creando tus propias figuras, con aquéllas que te han dado.



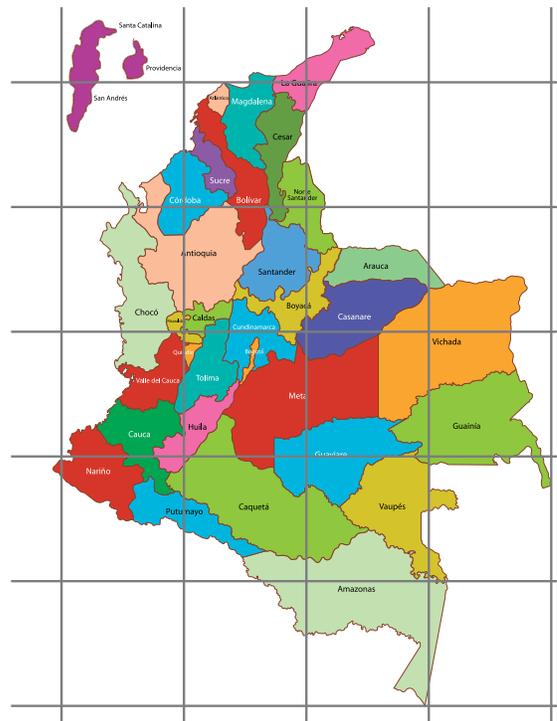
Si te hacen falta figuras, puedes construirlas o usar varias veces las dadas.

### Día a día

#### Los departamentos de Colombia

Calca y repinta el mapa y la cuadrícula, numera los cuadrillos y escribe un informe sobre cuál o cuáles departamentos quedaron en cada uno.

Identifica el departamento más extenso y el departamento menos extenso.



## Tema 4.

# Realizo mediciones y cálculos de masa



### Indagación

Toma como unidad de medida 100 fríjoles y separa para 3 amigas imaginarias los encargos que te hicieron: Sofía te encargó 13 unidades, Ofelia te pidió 15 unidades y Margarita te pidió  $23 \frac{1}{2}$  unidades.

Si la masa de cada unidad es 150 gramos. ¿Cuántos gramos has repartido entre tus amigas imaginarias? o y con argumentos hacer ver que tú tienes la razón y también permitir.

Reúnete con cuatro compañeros y entre los 5 comenten al respecto. Entre todos pueden llegar a un acuerdo y clarificar situaciones.

En el Sistema decimal se toma como unidad de masa el gramo con sus múltiplos y sus submúltiplos.

Para expresar una unidad de masa en otra se procede como en las medidas de longitud. De una mayor a otra menor se multiplica.

Ejemplo de Kg a g  $\longrightarrow$  se multiplica  $\times 1,000$  ¿por qué?

De una menor a otra mayor se divide.

Ejemplo de mg a Kg  $\longrightarrow$  se divide entre 1,000,000 ¿por qué?

En Colombia se usan otras unidades de masa llamadas unidades agrarias.

Tonelada métrica: 1 Tom = 1,000 kg

Arroba: 1@ = 25 libras



### Conceptualización

Todo cuerpo tiene materia y a la cantidad de materia que posee un cuerpo se le conoce como masa.

La masa es la cantidad de materia que poseen los cuerpos, la cual está constituida por los átomos.

En el Sistema internacional de medidas, la unidad estándar es el kilogramo (kg), el cual se define como la masa de un cilindro de una aleación (mezcla) de los metales platino e iridio, antiguamente se definía como la masa que tiene un litro de agua a  $4^{\circ}$  C.





## Aplicación

1. Expresa en gramos:

- $12\text{kg } 5\text{hm } 3\text{dg} \rightarrow$
- $2\text{g } 6\text{cg } 3\text{mg} \rightarrow$
- $15.56\text{dg} + 724.9\text{dg} \rightarrow$
- $43\ 105\text{mg} + 7\ 835\text{cg} \rightarrow$
- $3.5\text{hg} + 6.7\text{dg} + 4\ 200\text{cg} \rightarrow$

2. Expresa en kilogramos:

- $12\text{hg } 5\text{dg } 3\text{g} \rightarrow$
- $7\text{hg } 6\text{g } 3\text{cg} \rightarrow$
- $105\text{dag} + 424\text{dg} \rightarrow$
- $105\text{g} + 7\ 835\text{cg} \rightarrow$
- $3.5\text{hg} + 6.7\text{g} + 4\ 200\text{cg} \rightarrow$

### Entendemos por...

**Masa** la cantidad de materia que tiene un cuerpo. Se mide en kilogramos, gramos, toneladas, libras, onzas, etc.

**Peso** la fuerza con que la Tierra atrae un cuerpo y depende de su masa. Un cuerpo de masa el doble que otro, pesa también el doble. Se mide en Newtons, kg-fuerza, dinas, libras-fuerza, onzas-fuerza, etc.

### Diversión matemática

#### La bola más pesada

Una bolsa contiene 27 bolas de billar que parecen idénticas. Sin embargo, nos han asegurado que hay una defectuosa que pesa más que las otras.

Disponemos de una balanza, pero no de un juego de pesas, de manera que lo único que podemos hacer es comparar pesos.

Demuestra que se puede localizar la bola defectuosa con solo tres pesadas.

Tomado de: <http://www.acertijosyenigmas.com/2008/05/22/acertijo-balanzas-sin-pesas/>

### Día a día

**Peso de un cuerpo en los distintos planetas del sistema solar.**

La siguiente lista describe el peso de un cuerpo de «masa unidad» en la superficie de algunos cuerpos del sistema solar, comparándolo con su peso en la Tierra:

Cuerpo celeste	Peso relativo	g (m/s <sup>2</sup> )
Sol	27.90	274.1
Mercurio	0.377	3.703
Venus	0.907	8.872
Tierra	<b>1</b>	<b>9.8226</b>
Luna	0.165	1.625
Marte	0.377	3.728
Júpiter	2.364	25.93
Saturno	0.921	9.05
Urano	0.889	9.01
Neptuno	1.125	11.28

Tomado de: <http://es.wikipedia.org/wiki/Peso>

Con los valores de la tabla anterior podemos calcular el peso de un cuerpo en cada uno de los planetas de nuestra galaxia. Por ejemplo: Una persona que en la Tierra pesa 60 kilogramos-fuerza, pesará en la luna  $(60\text{ kilogramos-fuerza})(0.165) = 9.9\text{ kilogramos-fuerza}$ , aproximadamente 10 kilogramos-fuerza, que es una sexta parte de lo que pesa en la Tierra.



## Tema 5.

# Realizo mediciones y cálculos de tiempo



### Indagación

El reloj de sol es un instrumento usado desde tiempos muy remotos con el fin de medir el paso de las horas, minutos y segundos (tiempo).

Se denomina también cuadrante solar.

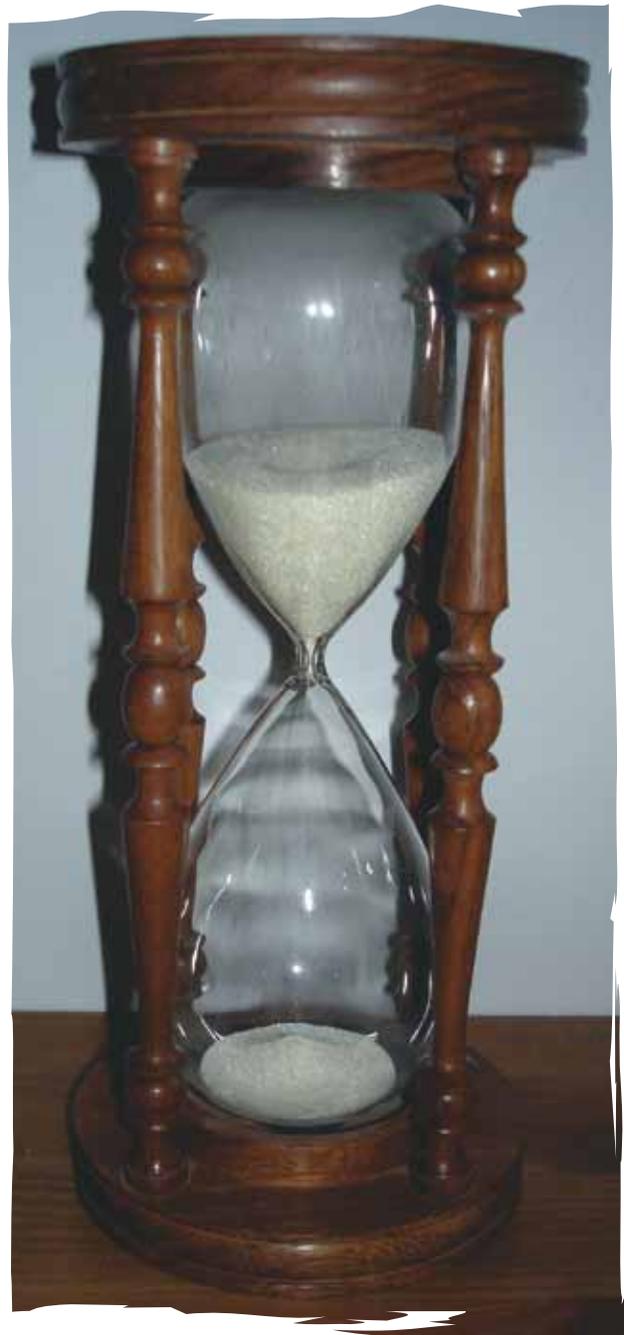
Emplea la sombra arrojada por un gnomon o estilo sobre una superficie con una escala para indicar la posición del Sol en el movimiento diurno.

Según la disposición del gnomon y de la forma de la escala se puede medir diferentes tipos de tiempo, siendo el más habitual el tiempo solar aparente.

La ciencia encargada de elaborar teorías y reunir conocimiento sobre los relojes de sol se denomina gnomónica.

Un reloj es cualquier dispositivo que puede medir el tiempo transcurrido entre dos eventos que suceden respecto de un observador.

Con otro compañero inventa una manera o procedimiento o aparato para medir el tiempo.





## Conceptualización

### Medidas de tiempo

La Luna es el único satélite natural de la Tierra situada a una distancia aproximada de 380,000 km. Gira alrededor de nuestro planeta empleando 27.3 días en darle la vuelta. En el mismo tiempo da también una vuelta alrededor de sí misma, por eso siempre mantiene la misma cara dirigida hacia la Tierra.



Si un día tiene 24 horas. ¿Cuántas horas emplea la Luna en darle una vuelta a la Tierra? ¿Cuántos minutos?

**Cálculo de horas:** Basta realizar la multiplicación

$$27.3 \times 24 = 655.2$$

La luna gasta 655.2 horas en un giro alrededor de la Tierra.

**Cálculo de minutos:** Como cada hora tiene 60 minutos, entonces realizamos la operación:

$$655.2 \times 60 = 39,312$$

La luna emplea 39,312 minutos en un giro alrededor de la Tierra.

Tomado de: (Galaxia Física 10 – Edit. Voluntad 1998- páginas 302-304)

El tiempo lo medimos en horas, minutos y segundos, que por ir de 60 en 60 constituyen un sistema sexagesimal, igual que la medida de los ángulos que medimos en grados y segundos y también van de 60 en 60.

Tanto las mediciones de ángulos en grados y segundos de grado como las de tiempo: horas, minutos y segundos, no pertenecen al sistema decimal.

Los períodos de tiempo mayores que una hora, se utilizan:

Un día: Es el tiempo que tarda la Tierra en dar una vuelta completa alrededor de su eje.

- 1 día = 24 horas.
- 1 semana = 7 días.
- 1 mes = 30 días.

Un año: Es el tiempo que tarda la Tierra en dar una vuelta completa alrededor del Sol.

- 1 año = 365 días, excepto el año bisiesto que son 366 días.
- 1 lustro = 5 años.
- 1 década = 10 años.
- 1 siglo = 100 años.
- 1 milenio = 1,000 años.

### Suma o resta de medidas de tiempo

Ya sea que sumemos o que restemos tiempos es necesario que sus miembros estén en la misma unidad.

Por ejemplo si sumamos horas con minutos debemos pasar ambos miembros a una de ellas, bien sea a horas o bien a minutos.

$$1\text{h} + 15\text{ min} = 60\text{ min} + 15\text{ min} = 75\text{ min}$$

o también:

$$1\text{h} + 15\text{ min} = 1\text{h} + \frac{1}{4}\text{ h} = 1\frac{1}{4}\text{ h}$$



### Aplicación

En tu cuaderno y de manera individual, resuelve las operaciones siguientes:

1.  $29\text{ h } 37\text{ min } 54\text{ seg} + 34\text{ h } 25\text{ min } 5\text{ seg}$ .
2.  $125\text{ h } 31\text{ min } 50\text{ seg} + 38\text{ h } 23\text{ min } 56\text{ seg}$ .
3.  $32\text{ h } 39\text{ min } 5\text{ seg} - 21\text{ h } 38\text{ min } 54\text{ seg}$ .
4.  $65\text{ h } 28\text{ min } 54\text{ seg} - 34\text{ h } 20\text{ min } 55\text{ seg}$ .
5. Un campesino sale de su casa a las 8 en punto de la mañana y tarda en llegar a lo alto de una montaña 3 horas, 25 minutos y 30 segundos. Permanece allí media hora y después inicia el viaje de regreso, empleando para ello 2 horas 48 minutos y 20 segundos. ¿A qué hora llega a su casa?
6. Un operario ha controlado un telar durante 6 h y 46 minutos y otro durante 7 horas y media. ¿Cuánto tiempo han empleado entre ambos?
7. El ganador de una carrera ciclista ha tardado 5 h 25 min 45 s y el último en cruzar la meta 6 h 22 min 50 s. ¿Qué tiempo le ha sacado el ganador al último corredor?
8. A las 23 h 35 min 43 s hemos acabado de ver, sin interrupción, una película de vídeo cuya duración es de 1 h 45 min. ¿A qué hora hemos comenzado a verla.
9. ¿Cuántos segundos tardará la Luna en darle una vuelta a la Tierra?

### Entendemos por...

**Período** los lapsos o espacios de tiempo comprendidos entre dos fenómenos o hechos o marcas que determinemos con alguna regularidad. Por ejemplo el período comprendido entre una navidad y la anterior, es de un año.

## Diversión matemática

### El policía matemático

“Que tenga usted una buena mañana, oficial”, dijo el señor McGuire. “¿Puede usted decirme qué hora es?”.

“Puedo hacer eso exactamente”, replicó el agente Clancy, que era conocido como el policía matemático.

“Sume un cuarto del tiempo que hay entre la medianoche y ahora a la mitad del tiempo que hay entre ahora y la medianoche, y sabrá usted la hora correcta”.

¿Puede usted calcular la hora exacta en que ocurrió esta intrigante conversación?



## Día a día

La cronología (histórica, geológica, etc.) permite datar los momentos en los que ocurren determinados hechos (lapsos relativamente breves) o procesos (lapsos de duración mayor).

En una línea de tiempo se puede representar gráficamente los momentos históricos en puntos y los procesos en segmentos.

Las formas e instrumentos para medir el tiempo son de uso muy antiguo, y todas ellas se basan en la medición del movimiento, del cambio material de un objeto a través del tiempo, que es lo que puede medirse.

En un principio, se comenzaron a medir los movimientos de los astros, especialmente el movimiento aparente del Sol, dando lugar al tiempo solar aparente. El desarrollo de la astronomía, se fueron creando diversos instrumentos, tales como los relojes de sol, las clepsidras o los relojes de arena y los cronómetros.

Posteriormente, la determinación de la medida del tiempo se fue perfeccionando hasta llegar al reloj atómico. hizo que, de manera paulatina.

Todos los relojes modernos desde la invención del reloj mecánico, han sido contruidos con el mismo principio del "tic tic tic". El reloj atómico está calibrado para contar 9,192,631,770 vibraciones del átomo de Cesio para luego hacer un "tic".

Tomado de: <http://es.wikipedia.org/wiki/Tiempo>





## Este capítulo fue clave porque

- Diferencio los conceptos de magnitud y cantidad.
- Aprendí a :
  - Realizar conversiones entre medidas de longitud.
  - Realizar conversiones entre medidas de área.
- Realizar conversiones entre medidas de masa.
- Realizar conversiones entre medidas de tiempo.
- Solucionar problemas que requieren cálculos de longitud, área, masa o tiempo.

## Conectémonos con Las Ciencias Naturales



### Las medidas en las ciencias física y química

Para la física y la química, en su calidad de ciencias experimentales, la medida constituye una operación fundamental.

Las mediciones se realizan, se anotan se organizan, se grafican y se analizan para sacar conclusiones.

Sus descripciones del mundo físico se refieren a magnitudes o propiedades medibles.

Las unidades como cantidades de referencia a efectos de comparación, forman parte de los resultados de las medidas.

Cada dato experimental se acompaña de su error, o al menos, se escriben sus cifras de tal modo que reflejen la precisión de la correspondiente medida.



## Repasemos lo visto



Como vimos al inicio de la unidad, nos preguntábamos: **¿Son importantes las mediciones?**

Y podemos concluir que las mediciones están continuamente involucradas en las actividades cotidianas de las personas por eso debemos tener en cuenta lo siguiente:

1. Para las construcciones geométricas es necesario utilizar instrumentos de dibujo: Lápiz, borrador, regla, escuadras, transportador y compás.
2. Las rectas paralelas nunca se tocan.
3. Las rectas perpendiculares tienen un punto en común, en donde se cortan o cruzan formando 4 ángulos rectos.
4. Las medidas de longitud son unidimensionales, en el sistema decimal van de 10 en 10 y se utilizan para medir el perímetro de una figura que es su contorno.
5. Las medidas de superficie son bidimensionales, en el sistema decimal van de 100 en 100 y se utilizan para medir el área de una figura.
6. Las medidas de masa van de 10 en 10 en el sistema decimal igual que las medidas de longitud.
7. Las medidas de tiempo no pertenecen al sistema decimal. Las horas, los minutos y los segundos van de 60 en 60.

# Mundo rural

## El reloj de sol

La medición del tiempo existe desde hace miles de años.

Se sabe que los hombres de Cromagnon utilizaban varas de madera empotradas en tierra y que, de acuerdo con la longitud de la sombra que proyectara el Sol al caer sobre ellas, podían saber qué hora del día era: si la sombra era igual a la longitud del bastón en la mañana, eran las 9:00 a.m. si esto sucedía en la tarde, eran las 3:00 p. m.

Los egipcios desarrollaron la geometría a partir de la necesidad de medir sus tierras después de que bajaban las inundaciones del Nilo. Los griegos la perfeccionaron y fue Euclides quien en el siglo III a.C. estableció los teoremas en su obra "Los Elementos".

De ellos heredamos el sistema sexagesimal, que divide una circunferencia en 360 grados.

Como el día tiene 24 horas y equivale a una revolución completa de la Tierra, entonces cada hora corresponde a un ángulo de 15 grados ( $360 / 24 = 15$ ), es decir, que el Sol recorre 15 grados sobre el cielo cada hora.

Se cree que los Sumarios fueron los primeros en dividir el año en 12 unidades y el día, consistían en doce danna (cada danna duraría dos de nuestras horas), de 30 ges cada uno (cada ges duraría 4 minutos de los nuestros).

Los antiguos egipcios fueron los primeros en dividir el día en horas, a ellos les permitió orientar la pirámide Keops c. 2550 ad C. mediante referencias estelares.

Los Egipcios, alrededor de año 3500 a.d.C., alzaron obeliscos cuyas sombras indicaban el mediodía, y el día más largo y el más corto del año.

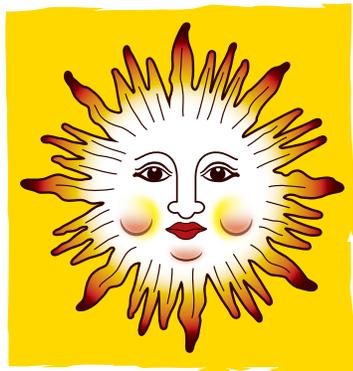
Posteriormente añadieron más marcas en la base del obelisco para dividir el día en más partes.

El hombre, con la ayuda de ciencia y la tecnología, cada vez inventa aparatos más sofisticados y precisos.

¿Crees que aún hoy se use algún tipo de reloj de sol en las zonas rurales?

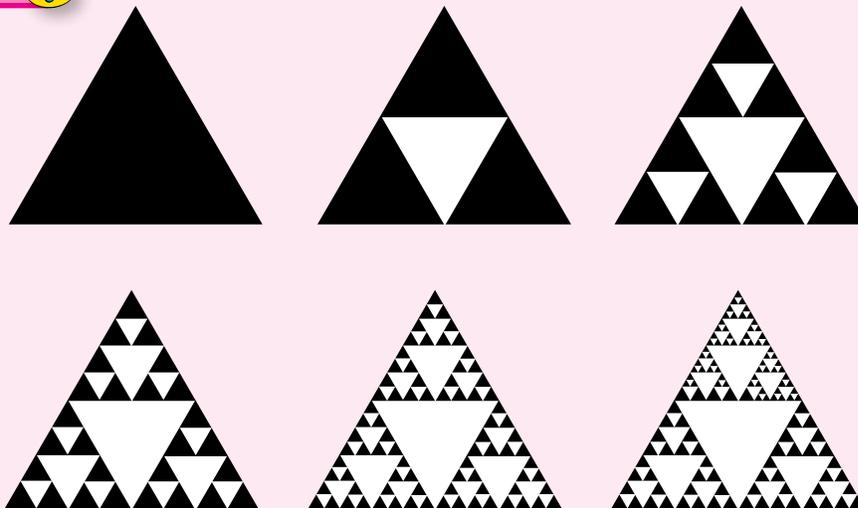
Comenta este artículos con tus compañeros y saquen algunas conclusiones.

Tomado de: <http://www.planetariodebogota.gov.co/descargas/publicaciones/RELOJ%20DE%20SOL.pdf>  
<http://www.estecha.com/relojes-solares-piedra.htm>



Obelisco que los egipcios dividieron en varias partes para que les indicara la hora.

## Dato curioso



### El triángulo de Sierpinski

El triángulo de Sierpinski es un fractal que se puede construir a partir de cualquier triángulo.

Intenta (al menos en parte) realizarlo, siguiendo las instrucciones dadas a continuación:

Partamos de la superficie de un triángulo equilátero de lado una unidad, al que llamaremos iteración  $n = 0$ .

Seguidamente tomemos los puntos medios de cada lado y construyamos a partir de ellos un triángulo equilátero invertido de lado  $\frac{1}{2}$ , será la iteración  $n = 1$ . (Ver figuras abajo). Lo recortamos.

Ahora repetimos el proceso con cada uno de los tres triángulos, esquineros de lado  $\frac{1}{2}$  que nos quedan (iteración  $n=2$ ). Así que recortamos, esta vez, tres triángulos invertidos de lado  $\frac{1}{4}$ . Y así sucesivamente.

Si repetimos infinitamente el proceso obtendremos una figura fractal denominada triángulo de Sierpinski.

El triángulo de Sierpinski se puede descomponer en tres figuras congruentes. Cada una de ellas con exactamente la mitad de tamaño de la original. Si duplicamos el ta-

maño de una de las partes recuperamos el triángulo inicial.

En tu cuaderno y en compañía de un compañero, juega a completar.

Cuenta los triángulos así:

- Iteración 0 = 1 triángulo.
- Iteración 1 = 4 triángulos congruentes: 3 derechos + 1 invertido.
- Iteración 2 = 12 triángulos congruentes (9 derechos + 3 invertidos) + 1 de lado  $\frac{1}{2}$  de unidad.

Continúa:

- Iteración 3 =
- Iteración 4 =
- Iteración 5 =

**Waclaw Sierpinski** (1882-1969) fue un matemático polaco quien trabajó en teoría de números, teoría de conjuntos, geometría fractal y topología, famoso por la serie de fractales que llevan su nombre.

Tomado de: <http://es.wikipedia.org/wiki/fractal>

## ¿En qué vamos?

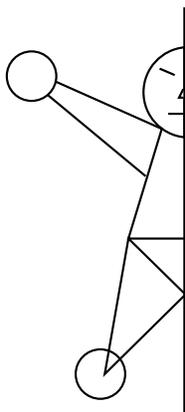


### Coevaluación “Reflexiono y trabajo con mis compañeros”:

Realiza primero el trabajo, en tu cuaderno, de manera individual y después comparas tus procesos y respuestas con tus compañeros. Chequea y corrige si tienes errores.

1. Sigue los pasos para realizar la construcción siguiente:
  - a. Haciendo centro en O y con radio OA, traza una circunferencia.
  - b. Apoya la punta de acero en A y traza un arco que pase por O y que corte la circunferencia en dos puntos, que llamarás X y Y.
  - c. Apoya la punta de acero en la intersección anterior y vuelve a trazar un arco que pase por O y corte la circunferencia en dos puntos, continúa los trazos en forma sucesiva.

Qué figura formaste?, ¿cuántos pétalos tiene?  
Si los vértices de cada pétalo están sobre la circunferencia, los trazos son correctos.
2. Dibuja un cuadrado y encuentra la estrategia para trazar una circunferencia que pase por los vértices del cuadrado. Explica.
3. Copia o calca y completa el diseño que se te presenta a continuación.
4. Un carpintero quiere hacer un cajón y dispone de una hoja de triplex de 150 cm de ancho y 250 cm de largo.
  - a. Dibuja a escala la tabla de triplex, de tal modo que 1cm de tu dibujo corresponda a 10 cm de la tabla.
  - b. Calcula el perímetro de la tabla.
  - c. Calcula el área de la tabla.
  - d. Si para hacer el cajón necesita una tabla de rectangular de 60 cm por 40 cm, 2 tablas de 60 cm por 25 cm y 2 tablas de 40 cm por 25 cm, ¿Cuántos  $\text{cm}^2$  de triplex gastó? ¿Cuánta tabla le quedó?
  - e. Recorta de tu dibujo los pedazos y arma el cajón.



## Le cuento a mi profesor

Conversa con tu profesor sobre cuánto aprendiste en esta unidad.

Qué sé hacer	Superior	Alto	Básico	Bajo
Construyo figuras según las condiciones dadas.	Construyo figuras utilizando instrumentos y aplicando con precisión las condiciones dadas.	Construyo figuras utilizando algunos instrumentos y aplicando con precisión las condiciones dadas.	Construyo figuras sin utilizar instrumentos pero aplicando las condiciones dadas.	Construyo figuras sin utilizar instrumentos y sin aplicar con precisión las condiciones dadas.
Encuentro los ejes de simetría de figuras dadas.	Encuentro los ejes de simetría de figuras dadas, con toda precisión.	Encuentro los ejes de simetría de algunas figuras dadas.	Encuentro los ejes de simetría de figuras dadas, sin mucha precisión.	No encuentro los ejes de simetría de figuras dadas.
Realizo conversiones entre unidades de área.	Realizo conversiones de múltiplos del $m^2$ a submúltiplos y viceversa, con toda precisión.	Realizo conversiones de múltiplos del $m^2$ a submúltiplos y viceversa, con alguna precisión.	Realizo algunas conversiones de múltiplos del $m^2$ a submúltiplos y viceversa.	No tengo precisión en las conversiones de múltiplos del $m^2$ a submúltiplos y viceversa.

## Participo y aprendo

Lee el enunciado y señala con una x la categoría correspondiente, según lo que has aprendido.

Participo y aprendo	Siempre	Casi siempre	A veces	Nunca	¿Qué debo hacer para mejorar?
Me intereso por trabajar en clase.					
Comparto aclaraciones con mis compañeros.					
Presento mis dudas sobre algún tema a mi profesor.					
Respeto el espacio de mis compañeros.					
Soy solidario en el trabajo en grupo.					
Escucho los planteamientos de mis compañeros.					
Manifiesto gusto por el trabajo matemático.					
Repaso en casa lo visto en clase.					
Intervengo en clase.					
Aplaudo las buenas intervenciones en clase de mis compañeros.					

# Proporcionalidad

## Resolvamos

### Te has preguntado:

#### ¿Qué relaciones existen entre las dimensiones de las partes del cuerpo humano?

Desde que se conoce la existencia del ser humano se ha tenido noticia de las diversas manifestaciones artísticas que dan cuenta de su historia.

La proporcionalidad está en lo bello, en lo preciso, en las cosas dignas de admirar.

Particularmente, la naturaleza nos ofrece modelos que nos muestran proporcionalidad.

Las relaciones entre las partes existen con significado matemático.

Las leyes que se cumplen en todo cuanto es proporcional y es la geometría uno de los campos en donde se encuentran las pautas para realizar las construcciones proporcionales.

Un ejemplo de renombre histórico es el dibujo llamado “El hombre de Vitruvio”, realizado hacia 1492 por el italiano Leonardo da Vinci

El cuadro del Hombre de Vituvrio es un estudio de las proporciones del cuerpo humano, realizado a partir de los textos del arquitecto romano Vitruvio titulados -Vitruvii De Architectura-, y del que el dibujo toma su nombre.

Algunas de las notas de Leonardo da Vinci que acompañan el dibujo determinan las proporciones del cuerpo humano de acuerdo con el texto antiguo de Vitruvio:



- Una palma es la anchura de cuatro dedos.
- Un pie es la anchura de cuatro palmas.
- Un antebrazo es la anchura de seis palmas.
- La altura de un hombre son cuatro antebrazos (24 palmas).
- La longitud de los brazos extendidos de un hombre es igual a su altura.
- La altura de la cabeza hasta el final de las costillas es un cuarto de la altura de un hombre.
- La anchura máxima de los hombros es un cuarto de la altura de un hombre. El ombligo es el punto central natural del cuerpo humano.

Referentes de calidad	Capítulos
<b>Estándares</b>	1. Proporciones directas
Calculo áreas y volúmenes a través de composición y descomposición de figuras y cuerpos.	
Resuelvo y formulo problemas que requieren técnicas de estimación.	
Identifico relaciones entre distintas unidades utilizadas para medir cantidades de la misma magnitud.	
Resuelvo y formulo problemas que involucren factores escalares (diseño de maquetas, mapas).	



# Proporciones Directas

Observando la perfección e integración de la naturaleza, las personas de la antigüedad, adquirieron conocimientos que aplicaron en sus construcciones y en los descubrimientos en las diferentes ciencias.

Hoy en día vemos las proporciones en los diseños arquitectónicos, en la solución de los diferentes problemas de ingeniería y en la vida cotidiana, entre muchos otros campos.

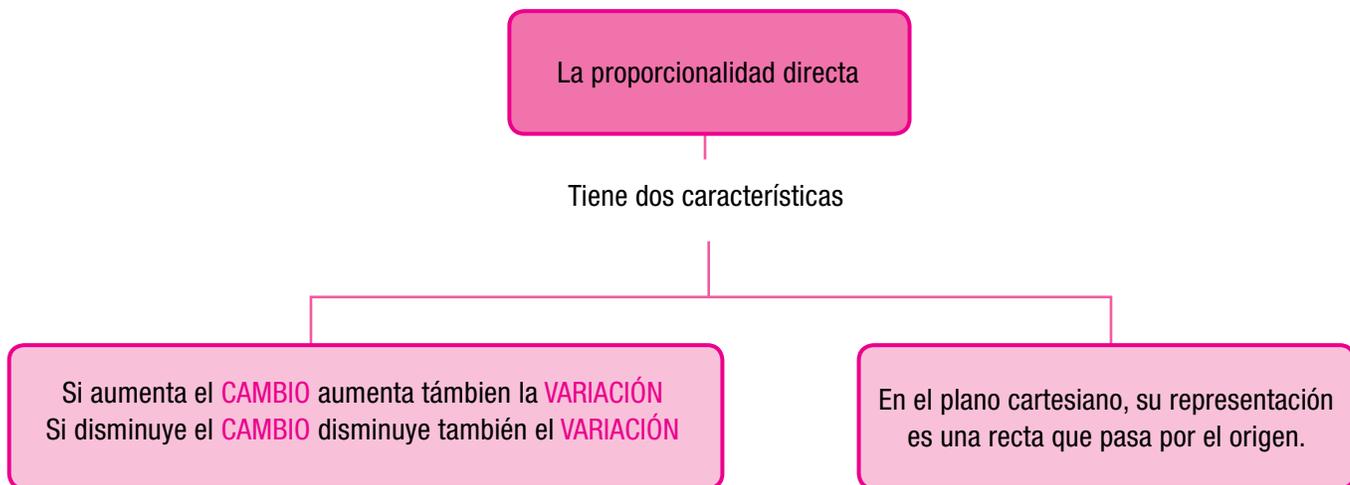
Ya se ha estudiado lo que es una razón, ahora es necesario apoyarse en ella para comprender lo que

es una proporción y ver su utilidad en la solución práctica de problemas que tienen que ver con situaciones cotidianas, como transacciones comerciales, monetarias u otras situaciones de cambio.

Por ejemplo:

Si el precio de 2 lapiceros equivale a \$5,000, entonces 4 lapiceros cuestan \$10,000; 6 lapiceros cuestan \$15,000, 8 lapiceros cuestan \$20,000, y así sucesivamente.

Como el ejemplo anterior hay muchísimos, comenta otros ejemplos similares, con tus compañeros.



# Tema 1. Cambio y variación directa



## Indagación

Manuel quiere tener un criadero de codornices ponedoras. Investigando todo lo relacionado con este proyecto, encontró una información en internet, sobre la alimentación para codornices mayores de 4 semanas de edad, que le interesó muchísimo. La información encontrada por Manuel dice:

### Dosificación

Suministre **Codornices postura** a voluntad, garantizando un consumo de 25 gramos diarios por ave.

La cantidad de alimento que ingiera el ave, depende del clima y del tipo de alojamiento.

La cantidad de alimento debe ser real y no producto del desperdicio de éste, situación relativamente común en codornices sin despigar.

Pensando sobre el número de aves y la cantidad de alimento diario que debería darles, resolvió Manuel elaborar la tabla 1:



Número de codornices	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	30	40	50	100	200	500	1000
Cantidad diaria, en gramos	25	50																	

Tabla 1

Cópiala en tu cuaderno y realiza los cálculos que debió hacer Manuel.

Compara los dos valores de cada columna de la tabla y saca alguna conclusión.

Comenta con unos compañeros tus resultados y discute con ellos sobre los interrogantes siguientes:

1. ¿Qué pasa con el alimento a medida que el número de codornices aumenta?
2. Como un kilogramo tiene 1,000 gramos, ¿Cuántos kg diarios de alimento de soya se comerán 1,000 codornices?
3. ¿Cuántos kg diarios de alimento de soya se comerán 100 codornices?
4. ¿Cuántos kg diarios de alimento de soya se comerán 10 codornices?
5. Escribe alguna conclusión sobre las codornices y su consumo diario de alimento.



## Conceptualización

En las actividades propias de las personas, en las ciencias y en las matemáticas encontramos fenómenos de cambio y variación que deben ser observados y analizados.

Veamos Ahora, tres situaciones:

### 1ª situación.

Un tendero se da cuenta de que un paquete de 16 pastillas de chocolate pesa 500 gramos. El tendero se pregunta:

¿Cuánto pesarán 16, 8, 4, 2, 32, 64 pastillas de chocolate?

Él observa cómo va **cambiando** el número de pastillas de chocolate y cómo va **variando** el peso.

Verifica en la tabla 2:

Nº pastillas	Peso gramos
16	500
8	250
4	125
2	62.5
32	1,000
64	2,000

Tabla 2



El tendero revisó la tabla varias veces y al descubrir algo, exclamó:

¡Cuando el número de pastillas bajó a la mitad, el peso también bajó a la mitad!

¡Cuando el número de pastillas subió al doble, el peso también subió al doble!

### 2ª situación

La ilustración 1, muestra el desplazamiento de un hombre por un camino.



Ilustración 1

Cada vez que el hombre avanza en su desplazamiento, recorre una distancia, en tanto que va transcurriendo tiempo. Se han mencionado dos magnitudes: distancia y tiempo.

Mientras más camine, más tiempo pasa.

### 3ª situación

La ilustración 2 muestra una secuencia de cuadrados, que va aumentando de acuerdo al tamaño del lado.

Así: el primer cuadrado tiene 1 cm de lado,  
 el segundo cuadrado tiene 2 cm,  
 el tercer cuadrado tiene 3 cm y  
 el cuarto cuadrado tiene 4 cm

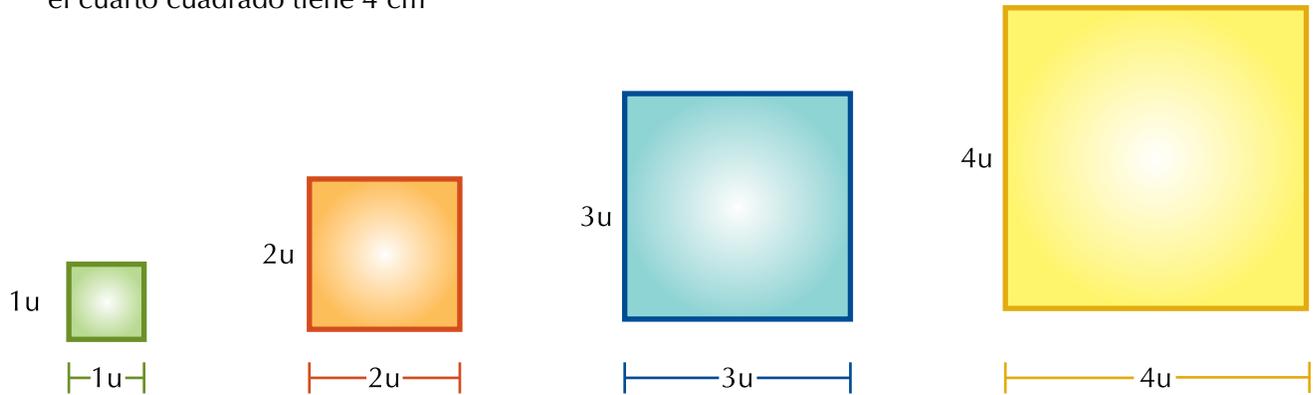


Ilustración 2

Recordemos que perímetro de una figura es la longitud de su contorno, es decir, la suma de las longitudes de sus lados. Ver unidad 2 Geometría.

Llamamos P1 al perímetro del cuadrado 1, esto es:

$$P_1 = 1\text{ cm} + 1\text{ cm} + 1\text{ cm} + 1\text{ cm} = 4 \times 1\text{ cm} = 4\text{ cm}$$

$$P_2 = 2\text{ cm} + 2\text{ cm} + 2\text{ cm} + 2\text{ cm} = 4 \times 2\text{ cm} = 8\text{ cm}$$

$$P_3 = 3\text{ cm} + 3\text{ cm} + 3\text{ cm} + 3\text{ cm} = 4 \times 3\text{ cm} = 12\text{ cm}$$

$$P_4 = 4\text{ cm} + 4\text{ cm} + 4\text{ cm} + 4\text{ cm} = 4 \times 4\text{ cm} = 16\text{ cm}$$

La tabla 3 muestra la relación entre la longitud de los lados y el perímetro correspondiente:

Longitud del lado (cm)	1	2	3	4
Perímetro (cm)	4	8	12	16

Tabla 3

La representación de la información correspondiente a la tabla 3, se muestra en el gráfico 1.

En tu cuaderno copia y completa los enunciados referentes al gráfico 1

Cuando el lado del cuadrado es \_\_\_\_\_, entonces,  
 se representa en la gráfica con el punto \_\_\_\_\_.

Así:

Cuando el lado es 1, el perímetro es 4, entonces, se representa en la gráfica con el punto (1,4).

Cuando el lado es 2, el perímetro es 8, entonces, se representa en la gráfica con el punto (2,8).

Cuando el lado es 3, el perímetro es 12, entonces, se representa en la gráfica con el punto (3,12).

Y cuando el lado es 4, el perímetro es 16, entonces, se representa en la gráfica con el punto (4,16).

Si la longitud del lado de un cuadrado aumenta, entonces, el perímetro también aumenta.

Es decir, que si la longitud del lado del cuadrado cambia, entonces, el perímetro también varía.

Si la longitud del lado de un cuadrado fuera 10 unidades (u), entonces, el perímetro sería

$$P_{10} = 10u + 10u + 10u + 10u = 4 \times 10 u = 40u.$$

Si la longitud del lado de un cuadrado es 20u entonces el perímetro es

$$P_{20} = 20u + 20u + 20u + 20u = 4 \times 20u = 80u.$$

Por lo tanto el valor del perímetro de un cuadrado depende de la longitud del lado.

Si determinamos la razón entre la longitud de cada longitud de lado del cuadrado y su respectivo perímetro, se obtienen cocientes constantes:

$$\frac{1}{4} = 0.25 \quad \frac{2}{8} = 0.25 \quad \frac{3}{12} = 0.25 \quad \frac{4}{16} = 0.25$$

El denominador de cada fracción se puede expresar como un producto.

En conclusión: Si se **cambia** la longitud del lado de un cuadrado, el perímetro del mismo cuadrado **cambia** 4 veces el valor de la longitud del lado.

Por ejemplo

Un cuadrado cuyo lado mide 5 cm tiene un perímetro de 20 cm, porque  $4 \times 5 \text{ cm} = 20 \text{ cm}$

Un cuadrado cuyo lado mide 10 cm tiene un perímetro de 40 cm, porque  $4 \times 10 \text{ cm} = 40 \text{ cm}$

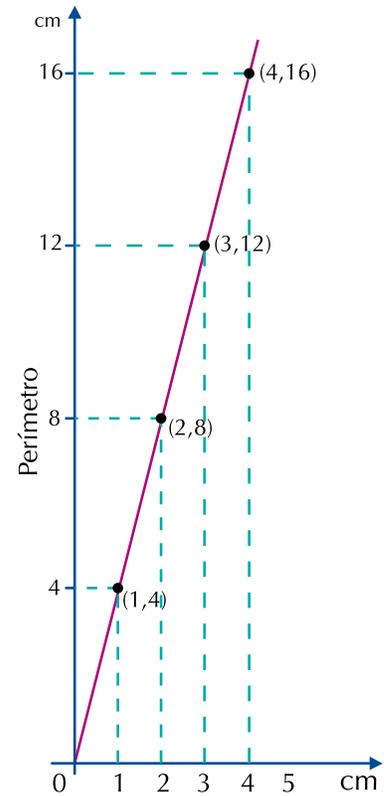


Gráfico 1

$\frac{\text{Longitud del lado}}{\text{Perímetro}}$	→	$\frac{1}{4} = \frac{1}{4 \times 1} ; \frac{1}{8} = \frac{2}{4 \times 2} ; \frac{1}{12} = \frac{3}{4 \times 3} ; \frac{1}{16} = \frac{4}{4 \times 4}$
---	---	---

Consideremos, ahora, la situación para las áreas de los cuadrados. Recordemos que el área del cuadrado es igual a lado por lado.

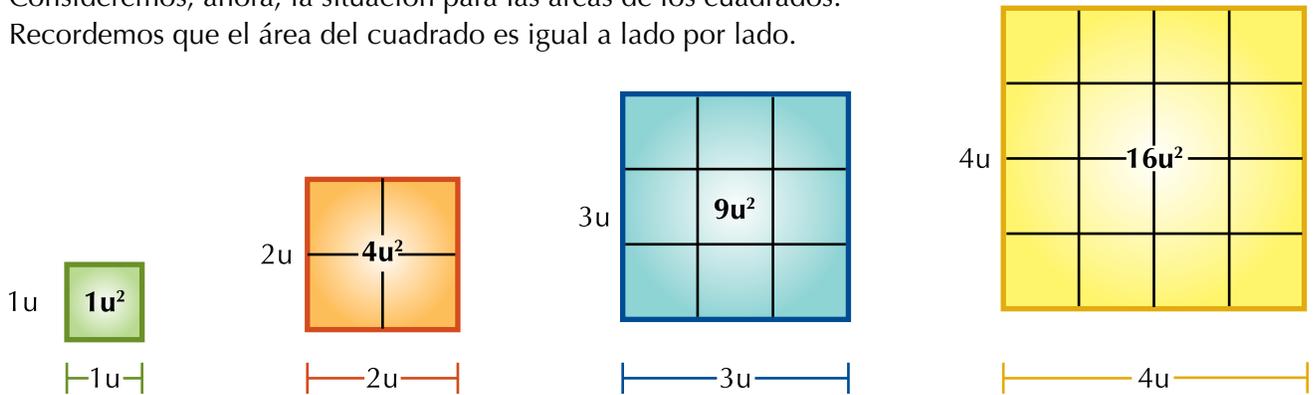


Ilustración 3

Observando la ilustración 3, en cuanto a las áreas de los cuadrados, tenemos el análisis siguiente:

Si  $A_1$  es el área del cuadrado de lado 1 unidad ( $1u$ ), entonces,

$$A_1 = 1u \times 1u = 1u^2$$

$A_2$  es el área del cuadrado de lado  $2u$ , entonces,  $A_2 = 2u \times 2u = 4u^2$

$A_3$  es el área del cuadrado de lado  $3u$ , entonces,  $A_3 = 3u \times 3u = 9u^2$

$A_4$  es el área del cuadrado de lado  $4u$ , entonces,  $A_4 = 4u \times 4u = 16u^2$

La tabla 4 muestra la relación entre la longitud de los lados de cada cuadrado con su área:

Longitud del lado	1	2	3	4
Área	1	4	9	16

Tabla 4

La representación de la información de la tabla 4, se muestra en el gráfico 2

Si la longitud del lado de un cuadrado fuera  $10u$ , entonces, el área sería  $A_{10} = 10u \times 10u = 100u^2$ ,

Si la longitud del lado de un cuadrado fuera  $20u$ , entonces, el área sería  $A_{20} = 20u \times 20u = 400u^2$ .

Si determinamos las razones ente el lado del cuadrado y su área, tenemos:

$$\frac{1}{1} = 1 ; \frac{2}{4} = 0.50 ; \frac{3}{9} = 0.333... ; \frac{4}{16} = 0.25 ; \frac{5}{25} = 0.2$$

Observemos que los cocientes resultantes son diferentes.

Los denominadores de las fracciones (las áreas) se pueden expresar como potencias de dos, cuya base es el lado del cuadrado.

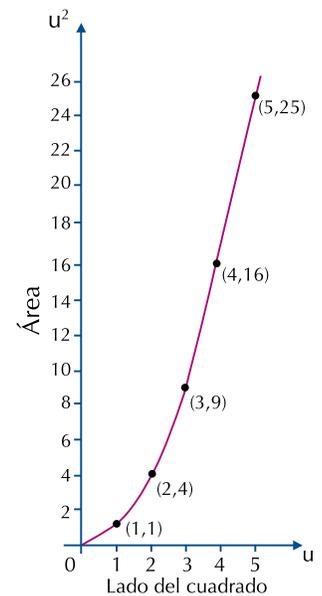


Gráfico 2

$\frac{\text{Longitud del lado del cuadrado}}{\text{Área del cuadrado}}$	→	$\frac{1}{1} = \frac{1}{1^2} ; \frac{2}{4} = \frac{2}{2^2} ; \frac{3}{9} = \frac{3}{3^2} ; \frac{4}{16} = \frac{4}{4^2} ; \frac{5}{25} = \frac{5}{5^2}$
--	---	---

Si la longitud del lado de un cuadrado aumenta, el área también aumenta

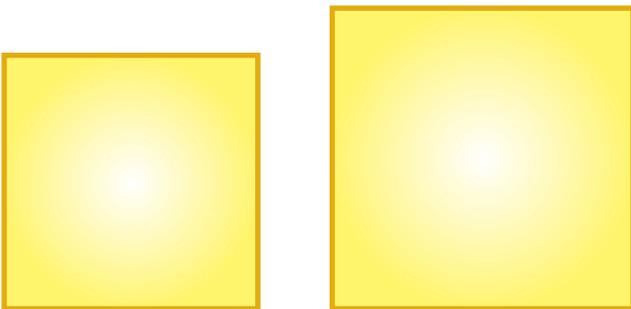
**Cuando dos magnitudes están relacionadas, puede ocurrir que al aumentar una, lo haga la otra y viceversa. En este caso decimos que las dos magnitudes están directamente correlacionadas.**

**Si un cuadrado mide  $7u$  de lado, entonces, su área es de  $49u^2$ , porque  $(7u)^2 = 49u^2$   
 Si un cuadrado mide  $9u$  de lado, entonces, su área es de  $81u^2$ , porque  $(9u)^2 = 81u^2$**

Piensa y discute con algunos compañeros, qué ocurrirá si el lado del cuadrado disminuye.

La longitud del lado de un cuadrado y su perímetro son magnitudes directamente proporcionales porque:

- Al aumentar la longitud del lado del cuadrado, aumenta el perímetro cuatro veces ese valor.
- Al disminuir la longitud del lado del cuadrado, disminuye el perímetro a la cuarta parte de veces ese valor.
- La razón o cociente entre ellas es constante y la gráfica es una línea recta que pasa por el origen.



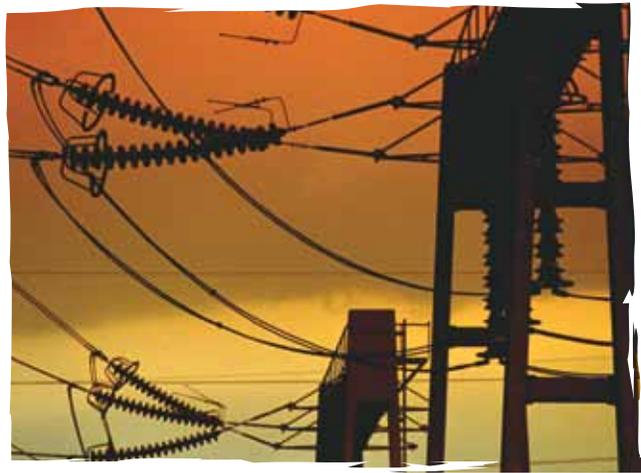
(Recuerda que el cuadrado tiene sus 4 lados iguales)

**Dos magnitudes son directamente proporcionales si al aumentar una, aumenta también la otra; si al disminuir la primera, la segunda también disminuye y, además, tienen cociente constante.**

**En este caso se dice que existe proporcionalidad directa y la representación gráfica es una línea recta que pasa por el origen del plano cartesiano.**

En la descripción de cada situación siguiente, se analiza la proporcionalidad directa.

1. El número de kilovatios-hora consumidos en una casa fue de 300; si el valor del consumo de esta cantidad de electricidad fue de \$36,000, ¿Cuál será el valor de consumo de electricidad por 120, 180, 230, 300, 450 y 520 kilovatios?



Una manera de analizar el problema es la siguiente:

Planteamiento:

Se forman las razones y se establecen las proporciones. Ensaya tu propia forma de hacerlo.

El valor desconocido, se representa en un recuadro rojo, así se obtiene la proporción:

$$\frac{\boxed{\phantom{000}}}{36,000} = \frac{120}{300}$$

Multiplicando por 36,000 los dos miembros de la igualdad y simplificando, se tiene:

$$\frac{\boxed{\phantom{000}}}{36,000} = \frac{120}{300}$$

$$\frac{\boxed{\phantom{000}} \times 36,000}{36,000} = \frac{120 \times 36,000}{\cancel{300} \times 1}$$

$$\boxed{\phantom{000}} = 40 \times 360$$

Realizando las operaciones,

$$\boxed{\phantom{000}} = 14,400$$

Respuesta: Por 120 kilovatios-hora de consumo de electricidad se pagará \$14,400.

Se procede de igual forma con cada valor de kilovatios consumidos (180, 230, 300, 450 y 520) y se pasan los datos a la tabla 5, como sigue:

Consumo (kw-h)	Importe (\$)
120	14,400
180	21,600
230	27,600
300	36,000
450	54,000
520	62,400

Tabla 5

Simplificando cada razón y obteniendo el cociente respectivo, se tiene:

$$\frac{14,400}{120} = 120$$

$$\frac{21,600}{180} = 120$$

$$\frac{27,600}{230} = 120$$

$$\frac{36,000}{300} = 120$$

$$\frac{54,000}{450} = 120$$

$$\frac{62,400}{520} = 120$$

Fíjate que al simplificar o al realizar la división de cada razón propuesta, siempre el resultado es 120.

A este número le vamos a llamar **Constante de proporcionalidad k**.

Al analizar el problema, se observa que: “al aumentar el consumo de electricidad (kilovatio-hora), también aumentó el precio que se pagó por ese consumo”. Además, su cociente de proporcionalidad es constante (120).

Esto significa que las cantidades son directamente proporcionales y su constante de proporcionalidad es 120, que equivale al costo de 1 kw-h.

Observa que 120 es el factor por el cual se multiplica el número de kilovatios para obtener el valor del consumo.



### Aplicación

Resuelve en tu cuaderno, cada ejercicio siguiente. Analízala con un compañero, completa los espacios, responde las preguntas y compara con otras parejas. Si tienes errores, por favor corrígelos.

- Alfonso, el mayordomo de la finca de don Gabriel, emplea 50 Kilogramos de alimento para suministrarle a 20 animales que tiene bajo su cuidado.



Se pregunta ¿cuántos Kilogramos necesitará Lucho, el mayordomo de la finca vecina, si él cuida 50 animales de los mismos?

¿Crees que Lucho empleará más kilogramos de alimento que Alfonso o menos?

Justifica tu respuesta y discútelo con algunos compañeros.

2. Un camión consume 25 litros de gasolina para recorrer 120 Km.

El conductor desea saber cuántos kilómetros recorrerá el mismo camión con 10 litros de gasolina.



¿Gastará más o menos de 25 litros? Justifica tu respuesta y discútelo con algunos compañeros.

3. Mateo le pregunta a Mirta, ¿Será cierto que “Cuanto más seamos, más cantidad de comida necesitamos”?



Justifica la respuesta que tú creas que le respondió Mirta a Mateo y compártela con algunos compañeros.

4. La tabla 6 muestra las distancias recorridas por un vehículo y los tiempos empleados.

Distancia (km)	75	50	37.5	25	7.5	5	1.25	1
Tiempo (min)	60	40	30	20	6	4	1	0.8

Tabla 6

Si divides el tiempo entre la distancia, obtienes la constante de proporcionalidad.

$$\frac{60}{75} = \square \quad \frac{20}{25} = \square \quad \frac{1}{1.25} = \square$$

$$\frac{40}{50} = \square \quad \frac{6}{7.5} = \square \quad \frac{0.8}{1} = \square$$

$$\frac{30}{37.5} = \square \quad \frac{4}{5} = \square$$

5. Comprueba que multiplicando cada distancia por la constante de proporcionalidad, se resultan los tiempos empleados. De acuerdo con tus compañeros de equipo, completa, en tu cuaderno:

a.  $75 \xrightarrow{\times 0.8} \square$

b.  $50 \xrightarrow{\times 0.8} \square$

c.  $1 \xrightarrow{\times 0.8} \square$

d.  $1.25 \xrightarrow{\times 0.8} \square$

e.  $37.5 \xrightarrow{\times 0.8} \square$

f.  $7.5 \xrightarrow{\times 0.8} \square$

g.  $5 \xrightarrow{\times 0.8} \square$

h.  $1 \xrightarrow{\times 0.8} \square$

6. Discute con algunos compañeros(as) las respuestas a las cuestiones siguientes:
- Si dos o más magnitudes son directamente proporcionales, ¿cuál es la constante de proporcionalidad en ellas?
  - Menciona dos situaciones de la vida diaria, que presenten una variación directamente proporcional.
7. Un boletín de salud dental reporta que en Latinoamérica, de cada 10 personas, 6 padecen caries.

En poblaciones de 2,000; 5,000; 20,000; 100,000; 300,000 y 1 millón de habitantes, ¿cuántas de ellas están afectadas de caries?

Observa la solución de la primera parte y con base en ella soluciona las otras partes.

Solución

Calculamos la constante de proporcionalidad:  $\frac{6}{10}$   
 Veamos: Cada población multiplicada por la constante de proporcionalidad te resulta el número de personas afectadas con caries,  $2,000 \times \frac{6}{10} = 1,200$



Continúa, completando los espacios.

a.  $5,000 \times \frac{6}{10} =$

c.  $100,000 \times \frac{6}{10} =$

b.  $20,000 \times \frac{6}{10} =$

d.  $300,000 \times \frac{6}{10} =$

Pasa tus resultados a la tabla 7

Habitantes	Padecen caries
10	6
2,000	1,200
5,000	
20,000	
100,000	
300,000	
1'000,000	

Tabla 7

8. Compara por cociente (o división) la relación entre el número de personas con caries y el número de habitantes de cada población.

Esto es:

$$\frac{\text{Número de personas con caries}}{\text{Número de habitantes}}$$

$$\frac{6}{10} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$$

Completa la conclusión siguiente:

La variación del número de personas con caries es \_\_\_\_\_ proporcional al total de habitantes y el valor de la constante de proporcionalidad es \_\_\_\_\_.

**NOTA:** Observa que algunas fracciones con las que generalmente trabajamos pueden simplificarse.

Así por ejemplo, la fracción  $\frac{6}{10} = \frac{6 \div 2}{10 \div 2} = \frac{3}{5}$ . Lo cual significa que 6 es a 10 como 3 es a 5.

9. Si una máquina embotelladora, envasa invariablemente (de manera constante, siempre igual) 360 refrescos en 4 horas, ¿cuántos refrescos deberá envasar en jornadas de 1 hora, 2 horas, 5 horas, 6 horas y 8 horas?

Organiza los datos completando la tabla 8 con las cantidades obtenidas.

Envasados			360			
Tiempo	1	2	4	5	6	8

Tabla 8



Compara por cociente la relación entre refrescos envasados y tiempo

$\frac{\text{Refrescos envasados}}{\text{Tiempo}}$	➔	$\frac{\square}{1} = \square$ ;	$\frac{\square}{2} = \square$ ;	$\frac{360}{4} = \square$ ;
		$\frac{\square}{5} = \square$ ;	$\frac{\square}{6} = \square$ ;	$\frac{\square}{8} = \square$

Puedes realizar los cálculos en la calculadora, si la tienes.

10. Un avión vuela con velocidad constante (siempre con la misma velocidad durante el recorrido), En la tercera hora de vuelo ha recorrido 1,200 km



Completa la tabla 9 en donde se ilustra la relación que existe entre la distancia recorrida en km y el tiempo en horas.

	1,200		2,000	
2	3	4		6

Tabla 9

$$\frac{400}{1} = \frac{\quad}{2}$$

$$\frac{1,200}{\quad} = \frac{\quad}{4}$$

$$\frac{\quad}{2} = \frac{2,000}{\quad}$$

$$\frac{\quad}{5} = \frac{2,400}{\quad}$$

$$\frac{400}{1} = \frac{\square}{2}$$

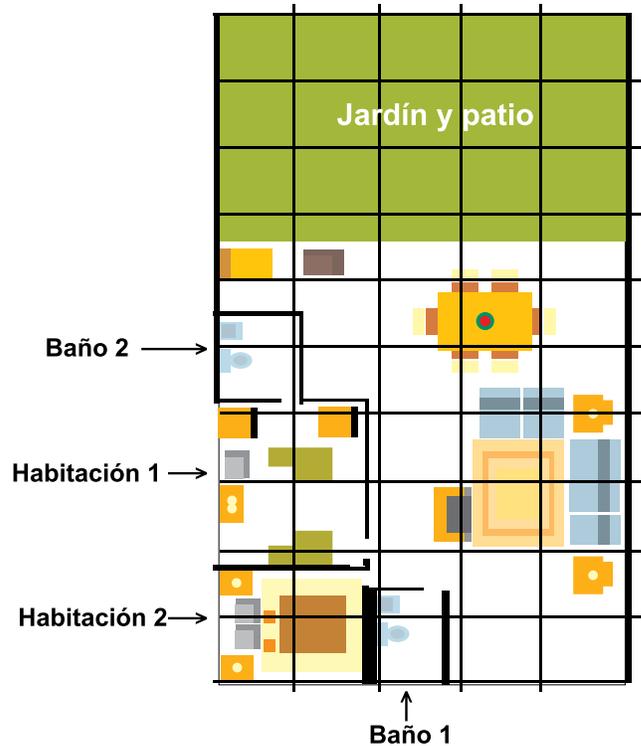
$$\frac{1,200}{\square} = \frac{\square}{4}$$

$$\frac{\square}{2} = \frac{2,000}{\square}$$

$$\frac{\square}{5} = \frac{2,400}{\square}$$

Calcula la constante de proporcionalidad del problema anterior  $k = \underline{\hspace{2cm}}$  y di cómo deberá ser su gráfica.

11. El dibujo del lado derecho representa la distribución de las partes de una casa.



Completa la tabla 10 y halla la constante de proporcionalidad que te permite encontrar las medidas reales a partir de las medidas del dibujo y viceversa (las medidas del dibujo a partir de las medidas reales).

	Medidas reales (cm)	Medidas dibujo (cm)
Ancho de la casa	1,000	5
Largo de la casa		
Largo habitación 1		2.5
Ancho baño	200	
Largo del jardín y patio	700	
Largo baño 2		1.3
Ancho habitación 2	380	

Tabla 10

12. Una lavandería automática, cobra el lavado de las prendas según las libras que pesen. Por lavar una cortina que pesa 5 libras, le facturaron a Guillermo \$16,000.

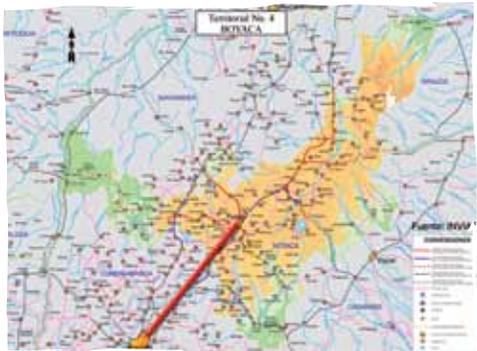
¿Cuánto deberá pagar si mandara a lavar cortinas que pesan:

- a. 4 libras
- b. 8 libras
- c. 10 libras
- d. Busca la constante de proporcionalidad.



13. La distancia de Bogotá a Tunja es 122 Km, marcada en el mapa con un segmento de recta que mide 6 cm.

- a. ¿Cuál será la distancia real entre dos ciudades que en este mismo mapa, están separadas 9 cm?
- b. Obtén la constante de proporcionalidad.



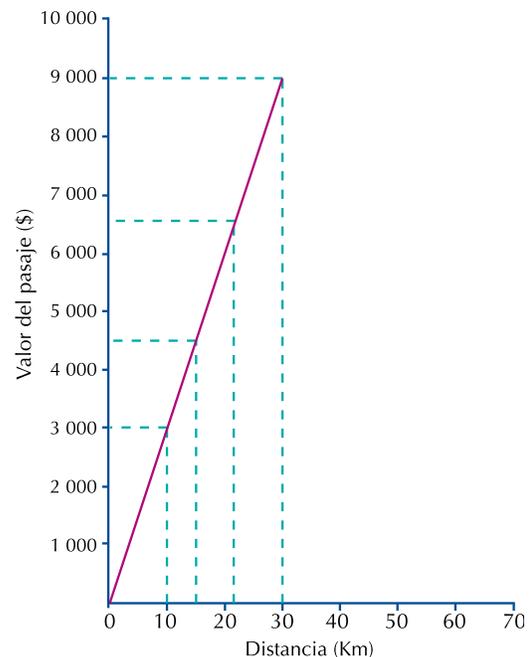
14. La tabla 11 relaciona la distancia recorrida y el valor del pasaje que una persona paga según los kilómetros que recorra. Analiza los datos de la tabla 11, contesta las preguntas y discute las respuestas con tus compañeros:

Distancia (km)	Valor del pasaje (\$)
10	3,000
15	4,500
22	6,600
30	9,000

Tabla 11

- a. ¿Cuál o cuáles magnitudes experimentan cambio?
- b. Respecto a la distancia en kilómetros, ¿aumentan o disminuyen los kilómetros a medida que se avanza en la tabla?
- c. Respecto al valor del pasaje, ¿aumenta o disminuye a medida que se avanza en la tabla?
- d. ¿Cuántos pesos costaría un pasaje, si la distancia recorrida es 40 kilómetros?
- e. ¿De qué depende el precio del pasaje?
- f. ¿Qué precio tiene el viajar 1 kilómetro?
- g. Explica el proceso para saber el precio de un pasaje cualquiera.

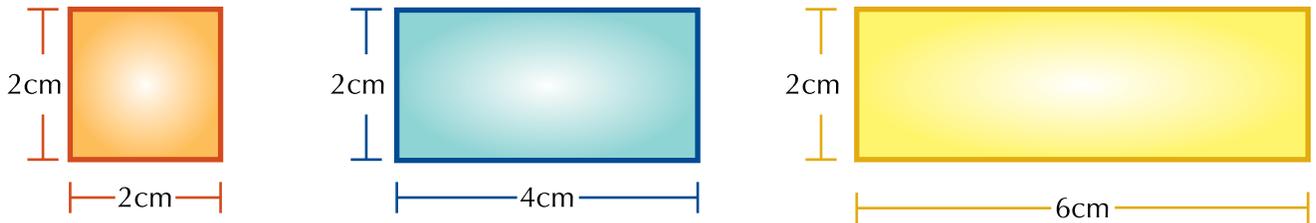
15. La situación del ejercicio número 8 (tabla de distancia y valor del pasaje), puede representarse en la gráfica cartesiana 2, así:



Observa que en el eje horizontal se ubican las distancias, que partiendo de 0 van en aumento y en el eje vertical se ubican los precios de los pasajes. De acuerdo con el gráfico, responde en tu cuaderno:

- a. ¿Cuánto cuesta un pasaje, cuya distancia por recorrer sea 20 Km?
- b. ¿Cuántos Km. se recorren en un viaje, si el pasaje cuesta \$ 7,500?

16. Analiza los tres rectángulos siguientes, en donde aumenta la medida de una de sus dimensiones (ancho).



Escribe en tu cuaderno la variación que hay en la otra magnitud.

### Entendemos por...

**Interdependientes** a dos personas, dos cantidades o dos cosas mutuamente dependientes, esto es cuando la una depende de la otra.

Por ejemplo, si A depende de B y B depende de A, entonces decimos que A y B son interdependientes.

### Diversión matemática

#### El juego del Bridg-it

Juega con otro compañero.

Usa un lápiz negro y otro rojo.

Con el lápiz negro pinta 12 puntos, en 4 columnas y con el lápiz rojo intercala otros 12 puntos, en 3 filas, como en la figura 1.

Cada jugador escoge un color.

El primer jugador traza una línea vertical o una línea horizontal que una dos puntos seguidos de su propio color.

El otro jugador hace exactamente lo mismo, uniendo dos puntos de su color. Hacen esto por turno.

El rojo trata de hacer un camino continuo desde la fila superior (arriba) de puntos rojos hasta la línea inferior (abajo) de puntos rojos.

Este camino no tiene que ser recto, se puede doblar en cualquier dirección siempre y cuando se unan lados opuestos del tablero, sin tocar los puntos del otro jugador.

El negro intenta formar un camino similar desde la primera columna del lado izquierdo hasta la última columna del lado derecho. Cada uno debe tratar de bloquear el camino del otro jugador.

El jugador que complete primero el camino es el ganador.

La figura 2 muestra un ejemplo de juego donde el negro gana.

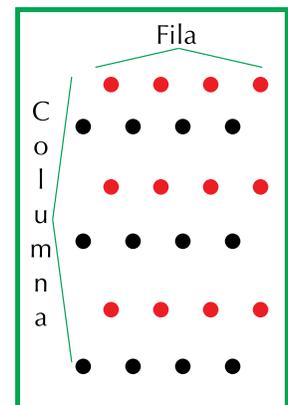


Figura 1

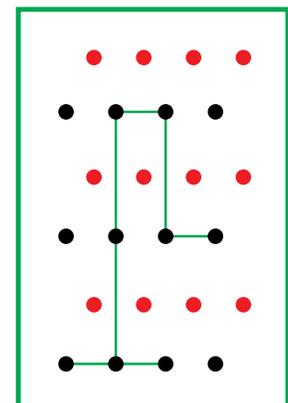


Figura 2

## Día a día

### Los viajes de Gulliver

Parte I: Viaje a Lilliput Mayo 4, 1699 — Abril 13, 1702

El libro comienza con un pequeño preámbulo en el que Gulliver, en el estilo de los libros de la época, da una pequeña reseña sobre su vida e historia antes de sus viajes. Le gusta viajar, aunque es este amor por los viajes lo que le lleva a naufragar.

En su primer viaje, Gulliver es llevado a la costa por las olas después de un naufragio y se despierta siendo prisionero de una raza de gente de un tamaño doce veces menor que un ser humano, menos de 15 cm de altura, que son los habitantes de los estados vecinos y rivales de Lilliput y Blefuscu.

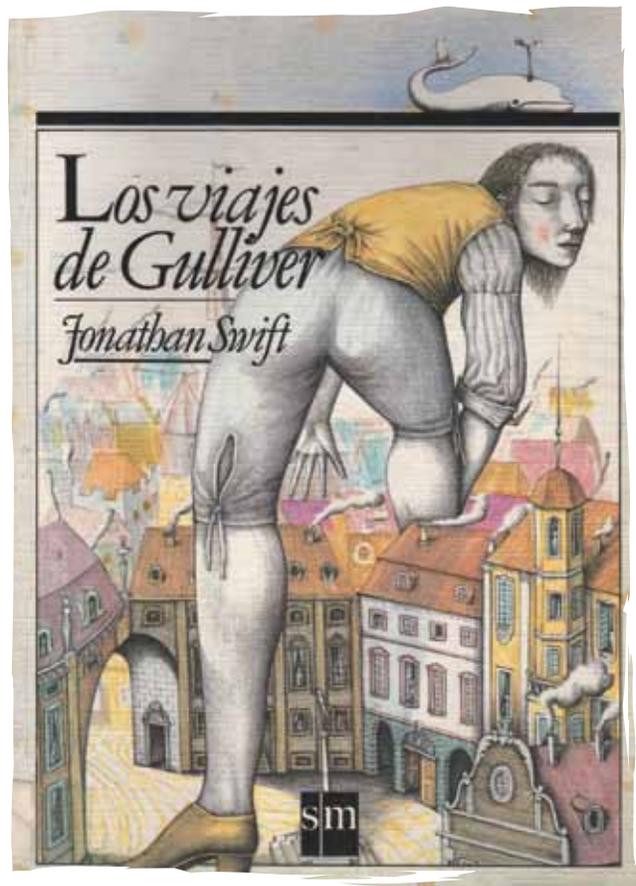
Después de asegurar que se comportaría bien, le dan una residencia en Lilliput y se convierte en el favorito en la corte.

Desde este momento, el libro sigue las observaciones de Gulliver en la Corte del soberano de Lilliput, modelada sobre la contemporánea de Jorge I de Gran Bretaña.

Gulliver ayuda a Lilliput robando la flota de los blefuscuianos. Sin embargo, se niega a convertir a la nación en una provincia de Lilliput, disgustando al Rey y a la corte. Gulliver es acusado de traición y condenado a ser cegado por los lilliputienses. Con la ayuda de un buen amigo, Gulliver consigue escapar hasta Blefuscu, donde arregla un bote abandonado y consigue ser rescatado por un barco que lo lleva de vuelta a su hogar.

El edificio que sirve como residencia de Gulliver en Lilliput es descrito como un templo en el que algunos años atrás hubo un asesinato y por esto el edificio fue destinado a usos profanos. Algunos comentaristas consideran que Swift, de este modo, se revela como francmasón aludiendo al asesinato del legendario gran maestro Hiram Abif .

[http://es.wikipedia.org/wiki/Los\\_viajes\\_de\\_Gulliver](http://es.wikipedia.org/wiki/Los_viajes_de_Gulliver)



## Tema 2. Comprendo la proporcionalidad directa



### Indagación

Marta se encuentra con Eduardo y le cuenta un problema matemático que la ha tenido pensando desde hace tiempo.

El problema de Marta es: Si 2 galones de gasolina cuestan \$16,000, ¿Cuánto costarán 5 galones con las mismas condiciones?

Eduardo le promete pensarlo y avisarle pronto.

En tu cuaderno, indícales a Marta y a Eduardo cómo se podría hallar solución al problema.

Propones varias maneras o caminos.

Reúnete con tres compañeros más y discutan varias formas de solución.



### Conceptualización

Hagamos en conjunto, un análisis para solucionar los problemas de Marta y Eduardo.

Ya sabemos que hay varias maneras o caminos para resolver un problema, analicemos algunas.

Para el problema de Marta:

#### 1º análisis y solución:

Dos galones de gasolina cuestan \$16,000, aumento el precio de 2 galones más y la mitad del precio de 2 galones que es el valor de un galón de gasolina, es decir:

$$\$16,000 + \$16,000 + \$8,000 = \$40,000$$

#### 2º. análisis y solución:

Imagino el precio de un galón de gasolina que es la mitad de dos galones. Como dos galones cuestan \$16,000, entonces el precio unitario será \$8,000 y multiplico por 5

$$5 \times \$8,000 = \$40,000$$



Ya se ha estudiado lo que es una razón, ahora es necesario apoyarse en ella para comprender lo que es una proporción y ver su utilidad en la solución práctica de los problemas.

La proporción se construye con la comparación de dos razones:

es a 16,000 como 5 es a 2"

$$\frac{\text{}}{\$ 16,000} = \frac{5 \text{ galones}}{2 \text{ galones}}$$

Multiplicando por \$16,000 y simplificando, tenemos:

$$\text{} = \frac{5 \times \cancel{\$16,000}^{8,000}}{\cancel{2}^1}$$

$$\text{} = \$ 40,000$$

Analicemos otra situación:

Si el precio de 2 lapiceros es \$5,000, entonces 4 lapiceros cuestan \$10,000; 6 lapiceros cuestan \$15,000, 8 lapiceros cuestan \$20,000, y así sucesivamente. Las razones entre el precio y el número de lapiceros, son:

$$\frac{\text{Precio}}{\text{Lapiceros}} = \frac{5,000}{2} = \frac{10,000}{4} = \frac{15,000}{6} = \frac{20,000}{8}$$

Si realizamos las respectivas divisiones, veremos que la razón es la misma, pues el precio de un lapicero es el mismo para cada razón. Así:

$$\text{"5,000 es a 2 como 10,000 es a 4"} \quad \frac{5,000}{2} = \frac{10,000}{4}$$

$$\text{"5,000 es a 2 como 15,000 es a 6"} \quad \frac{5,000}{2} = \frac{15,000}{6}$$

$$\text{"5,000 es a 2 como 20,000 es a 8"} \quad \frac{5,000}{2} = \frac{20,000}{8}$$

$$\text{"10,000 es a 4" como 15,000 es a 6"} \quad \frac{10,000}{4} = \frac{15,000}{6}$$

$$\text{"10,000 es a 4" como 20,000 es a 8"} \quad \frac{10,000}{4} = \frac{20,000}{8}$$

$$\text{"15,000 es a 6 como 20,000 es a 8"} \quad \frac{15,000}{6} = \frac{20,000}{8}$$

Observa que si realizamos las respectivas divisiones, veremos que la razón es la misma, pues el precio de un lapicero es el mismo para cada razón. Así:

$$\frac{5,000}{2} = 2,500$$

$$\frac{10,000}{4} = 2,500$$

$$\frac{15,000}{6} = 2,500$$

$$\frac{20,000}{8} = 2,500$$

Se denomina proporción a la igualdad de dos o más razones y se representa como:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{o} \quad a : b = c : d$$

A los términos a y d de la proporción se les conoce como extremos; a los términos b y c de la proporción se les conoce como medios.

En la proporción  $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$  los extremos son 2 y 10; a su vez 5 y 4 son los medios.

Recordemos que se denomina proporción a la igualdad de dos razones y se representa como:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{o} \quad a : d = b : c$$

A los términos a y d de la proporción se les conoce como extremos y a los términos c y b de la proporción se les conoce como medios.

Si se multiplican entre sí los extremos y los medios, obsérvese lo que sucede:

$$\boxed{2 \times 10 = 20} \quad \text{y} \quad \boxed{4 \times 5 = 20}$$

En efecto, los productos obtenidos son iguales, por lo que:

En toda proporción, el producto de los medios es igual al producto de los extremos.

A esta característica se le llama propiedad fundamental de las proporciones.

Si  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , entonces,  $a \times d = c \times b$

La propiedad fundamental de las proporciones tiene su utilidad en la solución de problemas en que, dada una proporción, se desconocen algunos de sus términos.

Veamos otro ejemplo:

En un arreglo floral, por cada 9 margaritas, se colocan 3 rosas; si en un arreglo hay 5 rosas, ¿Cuántas margaritas se podrán contar?

Estableciendo las razones correspondientes, obtenemos la igualdad:

$$\frac{\square}{5} = \frac{9}{3}$$

Como el número de margaritas que se podrán cortar aún no se conoce, se reemplaza por el recuadro  $\square$ .

El valor de  $\square$  puede obtenerse así:

Como el producto de los medios es igual al producto de los extremos, entonces:  $\square \times 3 = 9 \times 5$

De donde se obtiene que:  $\square = \frac{9 \times 5}{3}$ , entonces  $\square = 15$ .

Lo que se comprueba al igualar el producto de medios y extremos

$$15 \times 3 = 9 \times 5$$

$$45 = 45$$

En el arreglo se podrán contar 15 margaritas.

Por cada rosa, ¿cuántas margaritas llevan los arreglos? Averígualo y lo cuentas a tus compañeros.

### Un caso particular de la proporción directa

En la vida diaria es muy frecuente que se presenten problemas en los que se requiere calcular el tanto por ciento de un número.

Generalmente, las comisiones por un trabajo o ventas realizadas, las rebajas u ofertas, el descuento por concepto de impuestos sobre la

renta en los salarios, el interés que se recibe por ahorros o cédulas hipotecarias, el interés que se paga por préstamos, etcétera, se fijan en forma de tanto por ciento.

Una de las aplicaciones de este concepto es en la escuela, pues suelen calcularse porcentajes de asistencias, faltas, puntualidad, aprovechamiento, etcétera. Para entender lo que es el tanto por ciento, pueden considerarse los ejemplos siguientes:

1. En una escuela, 45 de cada 100 alumnos son mujeres.
2. En una biblioteca, 7 de cada 100 libros son de matemáticas.
3. En una población rural, 60 de cada 100 personas que nacen son mujeres.

Ahora bien, se puede establecer una razón con los datos de cada uno de estos ejemplos:

El primero, 45:100 o  $\frac{45}{100}$  y se lee: "45 es a 100" o 45%", el símbolo % significa partes de cien, 45 partes de 100, es decir, 45 por ciento

En el segundo, 7:100 o  $\frac{7}{100}$  y se lee "7 es a 100" o 7%

En el tercero, 60:100 o  $\frac{60}{100}$  o 60%

Observa que cada una de estas razones tiene el mismo denominador (100).

Este denominador es llamado consecuente.

Definimos el tanto por ciento como la razón o cociente (división) que existe entre un número y 100. El tanto por ciento se indica con el símbolo: %.

Por otra parte, podemos decir que:

$$45\% = \frac{45}{100} = 0.45$$

$$7\% = \frac{7}{100} = 0.07$$

$$60\% = \frac{60}{100} = 0.60 = 0.6$$



De esta forma, los alumnos que tienen entre 8 y 13 años son 1,281.

Por lo tanto, se puede concluir que el 84% de 1,525 es 1,281.

En forma general, la proporción que se establece para calcular el porcentaje, el tanto por ciento o la base es la siguiente expresión:

$$\frac{\text{Base}}{100} = \frac{\text{Porcentaje}}{\text{Tanto por ciento}}$$

Observa estos otros ejemplos:

De un grupo de 50 alumnos, 3 son extranjeros. ¿Cuál es el tanto por ciento del grupo que corresponde a extranjeros?

Datos:

Base=50

Tanto por ciento =

Sustituyendo en la expresión general:

$$\frac{50}{100} = \frac{3}{\text{$$

Aplicando la ley fundamental de las proporciones, se tiene:

Se realiza la multiplicación:  $50 \cdot \text{$  =  $3 \cdot 100$

$$50 \cdot \text{$$
 = 300

Dividiendo por 50 y simplificando, encontramos el valor del tanto por ciento

$$\frac{\cancel{50} \cdot \text{$$
 =  $\frac{300}{50}$

$$\text{$$
 =  $\frac{300}{50}$

$$\text{$$
 = 6%

Así que el tanto por ciento de alumnos extranjeros es el 6%.

El siguiente es un tipo de problema que puede ser resuelto mentalmente.

Luis recibe el 8% mensual de su sueldo por comisión. Si en el mes de octubre le correspondieron \$320,000 de comisión, ¿cuál fue su sueldo en este mes?

Solución:

Datos:

Comisión= 320,000

Tanto por ciento=8%

Base =

Sustituyendo en la expresión general, se tiene:

$$\frac{\text{$$
 =  $\frac{320,000}{8}$

Aplicando la ley fundamental de las proporciones, resulta:

$$8 \cdot \text{$$
 = (320,000) · (100)

Dividiendo los dos miembros de la igualdad por 8, y realizando las operaciones, tenemos:

$$\frac{\cancel{8} \cdot \text{$$
 =  $\frac{(320,000) \cdot (100)}{8}$

$$\text{$$
 = 4,000,000

Por lo tanto, Luis recibe un sueldo de \$4'000,000 Resuelve el mismo problema planteando otra proporción.

El uso del porcentaje desempeña un papel fundamental en el tratamiento y análisis de la información que proporcionan los medios de comunicación; este puede ser representado de distintas maneras a saber: por medio de grafica o en términos porcentuales.

Hasta ahora se ha aprendido a calcular el tanto por ciento de forma escrita; sin embargo, se puede hacer por medio de la calculadora.

Para ello, si observas detenidamente el teclado, notarás que además de las teclas



hay otra marcada como  $\boxed{\%}$  que es la tecla del tanto por ciento. El uso de esta última es muy sencillo, lo único que se tiene que hacer es oprimir la tecla de multiplicación y en todos los casos al final se debe oprimir la tecla  $\boxed{\%}$ .

Ejemplos:

$$80\% \text{ de } 750 = \boxed{7}\boxed{5}\boxed{0}\boxed{\times}\boxed{8}\boxed{0}\boxed{\%}\boxed{=} 600$$

$$12.5\% \text{ de } 600 = \boxed{6}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{\times}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{.}\boxed{5}\boxed{\%}\boxed{=} 75$$

Como observas, es muy fácil obtener el tanto por ciento con el auxilio de la calculadora, además de que se ahorra tiempo y esfuerzo. Algunos de los múltiples problemas que surgen a diario son relativamente fáciles de resolver por medio de la calculadora.

### Descuento y recargo

Algunos almacenes, en Colombia, programan temporadas de promociones, en las que sacan numerosos artículos rebajados, hasta agotar existencias, para renovar surtidos.



Uno de esos almacenes, anunció descuentos del 50% en vestuario de hombre, mujer y niño, cosa que fue aprovechada por Liliana para decirle a su esposo que compraran ropa a mitad de precio o comprar dos prendas por el precio de una.

Escribe en tu cuaderno un por qué Liliana interpreta que un descuento del 50% equivale comprar a mitad de precio o comprar dos prendas al precio de una (del precio original). Discute con algunos compañeros las explicaciones sobre el caso.

Cuando compramos de contado muchas veces nos hacen descuentos (rebajas) en los precios, pero cuando compramos a crédito nos cobran una financiación (recargo en el precio inicial). En ambos casos, generalmente se habla de porcentajes.

Estudia las situaciones siguientes y coméntalas con algunos compañeros(as):

1. Un producto que normalmente cuesta \$15,000, es puesto en promoción con un descuento del 20%.

- ¿Qué cantidad se ha descontado al precio original?
- ¿Cuál es el precio neto pagado?

#### Solución

a. Usando la calculadora tenemos:

$$\boxed{1}\boxed{5}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{\times}\boxed{2}\boxed{0}\boxed{\%}\boxed{=} 3,000$$

Por lo tanto, se ha descontado \$3,000 al precio original.

b. Si al precio de lista se le resta el descuento obtienes:  $15,000 - 3,000 = 12,000$ .

El precio neto a pagar es \$12,000.

2. Un señor quiere comprarse un vestido, para lo cual se le presentan las siguientes alternativas de pago:

- De contado le descuentan un 30%.
- Si paga en un mes, le rebajan el 5%.
- En dos meses paga el precio original que es de \$345,000.
- Si lo paga en tres meses, se le hace un recargo de 7.5%.
- ¿Cuáles son los diferentes precios que tiene el mismo vestido, según la forma de pago?

A fin de resolver este problema, es necesario organizar los datos en una tabla para su mejor análisis.

Precio original: \$345,000. Copia la tabla 12 en tu cuaderno y resuélvela.

Alternativas de pago	a	b	c	d
Plazo en meses	0	1	2	3
Tanto por ciento	30% (-)	5% (-)	0%	7.5% (-)
Descuento (-)	?	?	?	?
Recargo (+)	?	?	?	?
Precio con descuento o recargo	\$241,500	\$327,750	\$345,000	\$370,875

Tabla 12

- a. Observa que (-) significa descuento y (+) recargo. Al realizar las operaciones con la calculadora, se tiene: Para el descuento del 30%, operamos:

$$345000 \times 30\% - = 241,500$$

Luego, con descuento del 30% en el valor del vestido, el señor pagaría \$241,500

- b. Como es descuento a un mes, se tiene:

$$345000 \times 5\% - = 327,750$$

que corresponde al valor que pagaría por el vestido, con un descuento del 5%.

- c. Como pagarlo en dos meses no le genera descuento ni recargo, entonces, el señor deberá pagar el precio original que es de \$345.000.

- d. Como al pagar en tres meses tiene recargo, el valor será:

$$345000 \times 7.5\% + = 370,875$$

que es el precio con un recargo que corresponde al 7.5%.

Nota que 345,000 se toma como factor en los diferentes porcentajes para cada periodo.

A este número se le llama factor constante por ser componente de todas las multiplicaciones que se realizan.

De acuerdo con la tabla, al señor le conviene pagar de contado dicho vestido, pues le costaría \$241,500 por lo que se ahorraría \$103,500.

3. Juan trabaja en un centro comercial, en donde se vende la mercancía por menudeo y mayoreo.

Su jefe inmediato le ordena que haga descuentos en la venta de sillas de acuerdo con el número de ellas que adquiera el cliente.

Para ello se le proporciona la siguiente información: de 0 a 10 sillas, sin descuento; de 11 a 50, 10% de descuento; de 51 a 100, 20%; de 101 a 500, 30% y de 501 a 1 000, 40% de descuento.

¿A qué precio debe cobrar cada silla, si el precio de lista de cada una es \$50,000?



Elaborando la tabla 13, se tiene:

Número de artículos	De 0 a 10	De 11 a 50	De 51 a 100	De 101 a 500	De 501 a 1000
Descuento	0%	10%	20%	30%	40%
Precio según descuento	\$50,000	\$50,000	\$50,000	\$50,000	\$50,000
		\$5,000	\$10,000	\$15,000	\$20,000
		\$45,000	\$40,000	\$35,000	\$30,000

Tabla 13

El factor constante de este problema es \$50,000 que se debe multiplicar por cada uno de los porcentajes: 10%, 20%, 30% y 40%.

Como puedes observar, una tabla es una forma muy útil y práctica en la resolución rápida de un problema.



### Aplicación

Trabaja en tu cuaderno.

Con un compañero, analiza cómo varían las cantidades que intervienen en las situaciones que se presentan a continuación.

Cada pareja debe comparar sus resultados con los de otras parejas y Corregir los errores si los hay.

1. Un panadero utiliza 10 kg de harina para producir 13 kg de pan. Veamos la relación harina-masa en la tabla 14.

Harina (kg)	10	5	3	2.5	2	1	0
Masa de pan (kg)	13	6.5	3.9	3.25	2.6	1.3	0

Tabla 14

- a. ¿Cuántos kilogramos de masa para el pan se obtendrían con 4 kg de harina?
- b. Si se triplica la cantidad de harina, ¿qué pasa con la cantidad de masa?
- c. ¿Qué relación encuentras entre la cantidad de harina y la cantidad de masa para el pan?
- d. Escribe varias razones entre las cantidades de masa y de harina. ¿Cómo son esas razones? Conociendo la cantidad de harina, ¿cómo obtienes rápidamente la cantidad de masa para el pan?



**Recuerda que:**

**Una proporción se determina por la equivalencia de dos razones.**

**Al simplificar una razón cambia su forma pero no su valor.**

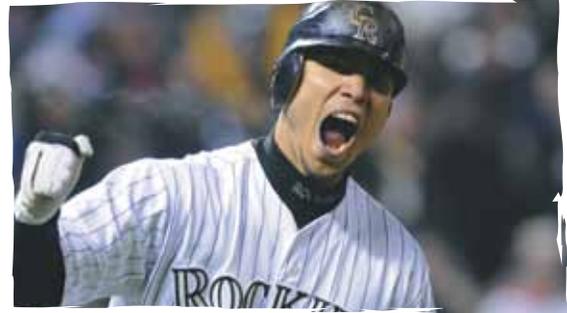
2. Establece la razón que representan las siguientes situaciones, trabaja en tu cuaderno:

a. Un automóvil recorre



180 km en 3 horas, ¿cuál es su velocidad?

b. Un beisbolista



realizó 6 hits al batear 15 veces. ¿Cuál es la razón?

c. Para este mismo beisbolista del ejercicio b., su puntaje es de 40 sobre 100 o 40%, ¿por qué?

3. En las siguientes proporciones ¿cuál es el valor de  ?

a.  $\frac{6}{5} = \frac{12}{\text{input}}$ , entonces  =

b.  $\frac{\text{input}}{27} = \frac{6}{9}$ , entonces  =

c.  $\frac{16}{5} = \frac{\text{input}}{10}$ , entonces  =

d.  $\frac{8}{5} = \frac{24}{\text{input}}$ , entonces  =

e) ¿Cuál propiedad de las proporciones aplicas para encontrar el valor de  ?

4. Si un tren recorre 255 km en 4 horas, andando a velocidad constante (siempre igual, sin variar)



- a. ¿Cuánto tiempo necesita para recorrer 340 km con la misma velocidad?
- b. ¿Qué pasa con el tiempo si aumenta la distancia?
- c. ¿Qué pasa si disminuye la distancia?

Anota la proporción que se forma con los datos.

5. Una docena de huevos tipo AA, cuesta \$4,800, ¿cuántos huevos del mismo tipo podemos comprar con \$10,000?



6. El costo de producción de 2 materas de barro de referencia 10-30 (tamaño mediano), es de \$7,000, ¿cuánto costará producir 17 materas de la misma referencia?
7. Un automóvil consume 6.8 litros de gasolina en 100 km, en carretera, andando a velocidad constante (siempre igual) de 60 km/h.
  - a. ¿Cuántos litros consume en recorrer 250 km en las mismas condiciones?
  - b. ¿Cuántos kilómetros puede recorrer con 34 litros de gasolina en las mismas condiciones?
8. El señor Alonso compró un computador con algunos accesorios, para lo cual se le plantearon las siguientes alternativas de pago: de contado le descuentan el 15%; en un mes, sólo el 7.5%, aunque si acaba en dos meses le dan el 2.5%. Pero si la paga en tres meses, le hacen el 6.75% de recargo, y en cuatro meses le cobran un 10% más sobre el precio de lista \$5'500,000 ¿Cuánto pagaría el señor Alonso en cada caso? Completa la tabla 15.



Tanto por ciento	15%(-)	7.5%(-)	2.5%(-)	6.75%(-)	10%(-)
Descuento (-)					
Recargo (+)					
Precio con descuento o recargo					

Tabla 15

¿Cuál es el factor constante del problema?

### Entendemos por...

**Fundamental** aquello que es esencial, que en un proceso es lo principal. Por ejemplo cuando decimos “La propiedad fundamental de las proporciones” nos estamos refiriendo a lo más importante en este tema.

### Diversión matemática

Juega con un compañero al que primero llene correctamente los cuadritos. En tu cuaderno, encuentra el valor del  para cada proporción.

a.  $\frac{12}{\square} = \frac{9}{12}$

b.  $\frac{8}{32} = \frac{3}{\square}$

c.  $\frac{4}{10} = \frac{\square}{60}$

d.  $\frac{3}{\square} = \frac{\square}{12}$

e.  $\frac{\square}{24} = \frac{6}{\square}$

f.  $\frac{1}{2} = \frac{3}{\square}$

Anota el puntaje correspondiente para la respuesta correcta en cada literal, en el orden de abajo hacia arriba en la columna de puntajes de la pirámide, así:

Anota 50 puntos en (a) si la respuesta fue correcta,

Anota 1,000 puntos en (b) si la respuesta fue correcta, y así con las otras.

Si alguna respuesta está errada, anótate un cero en la casilla de la letra correspondiente.

Finalmente, suma y escribe el total.

												Puntajes
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	(f)
	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	(e)
		3	0	0	0	0	0	0	0			(d)
			2	0	0	0	0	0				(c)
				1	0	0	0					(b)
					5	0						(a)
<b>Total</b>												

Compara las respuestas y los totales con tus compañeros.

### Día a día

#### El hormigón

El hormigón es una mezcla de cemento, arena y piedras en proporción 1:2:6 que significa 1 medida de cemento, 2 medidas de arena y 6 medidas de piedras.

Pero si echaras 12 cubos de piedras en una Hormigonera (máquina que revuelve la Mezcla), ¿cuántos cubos de cemento y cuántos cubos de arena necesitas para hacer una mezcla de 1:2:6 ?

Basta completar la tabla. Si tienes 12 cubos de piedras, pero inicialmente tenías 6 y como 12 es el doble de 6, simplemente tomas el doble de cada cosa para mantener la proporción.

Texto: <http://www.disfrutalasmaticas.com/numeros/proporciones.html>



	Cemento	Arena	Piedras
<b>Proporción:</b>	1	2	6
<b>Tienes:</b>			12



## Este capítulo fue clave porque

- Entendí la relación de cambio en la variación directamente proporcional
- Aprendí las utilidades de la proporcionalidad directa
- Descubrí diversas situaciones en las que se nos presenta la proporcionalidad directa

## Conectémonos con...



### Hotel Burj al-Arab de Dubait

La construcción del edificio se inició en 1994 y se inauguró oficialmente el 1 de diciembre de 1999. Su forma está inspirada en una embarcación a vela y está localizado en un área específica con el objetivo de que su sombra no cubra la playa. En el punto más alto del hotel se encuentra un helipuerto, el cual es utilizado como cancha de tenis cuando no está recibiendo helicópteros.

El hotel está catalogado como de siete estrellas, categoría que va más allá de la clasificación normal de los hoteles, de uno a seis, debido a sus características realmente excepcionales que lo diferencian de cualquier otro tipo de hotel en el mundo.

El Burj Al Arab no tiene habitaciones normales, sino que cuenta con 202 suites dobles. La más pequeña de estas suites ocupa un área de 169 m<sup>2</sup>, mientras que la mayor cubre un área de 780 m<sup>2</sup>.



La suite Real cuesta 28,000 dólares la noche. También tiene un servicio de autos Rolls-Royce de lujo disponible para cada huésped.

<http://portalevlm.usal.es/blogs/ampliacion/2009/09/>  
[http://es.wikipedia.org/wiki/Burj\\_Al\\_Arab](http://es.wikipedia.org/wiki/Burj_Al_Arab)

## Repasemos lo visto



Retomando el dibujo de “hombre de Vitruvio” analizado al comienzo del capítulo, podemos afirmar que cuando dos magnitudes están relacionadas, puede ocurrir que al aumentar una, lo haga la otra y viceversa. En este caso decimos que las dos magnitudes están directamente correlacionadas.

Dos magnitudes son directamente proporcionales si al aumentar una, aumenta también la otra; si al disminuir la primera, la segunda también disminuye y, además, tienen cociente constante.

En este caso se dice que existe proporcionalidad directa y la representación gráfica es una línea recta que pasa por el origen.

Se denomina proporción a la igualdad de dos o más razones y se representa como:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{o} \quad a : b = c : d$$

A los términos **a** y **d** de la proporción se les conoce como extremos; a los términos **b** y **c** de la proporción se les conoce como medios.

En toda proporción, el producto de los medios es igual al producto de los extremos.

A esta característica se le llama propiedad fundamental de las proporciones.

$$\text{Si } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ entonces, } a \times d = c \times b$$

Definimos el tanto por ciento como la razón o cociente que existe entre un número y 100.

El tanto por ciento se indica con el símbolo: %.

# Mundo rural

## Absorción aproximada de nutrientes por las plantas

**D**entro de la información que requiere el técnico agrícola para recomendar fertilizantes, está el conocer la cantidad de nutrientes que el cultivo extrae del suelo para lograr un rendimiento esperado (rendimiento meta).

Al iniciar sus planes de producción de cultivos en el campo, es de vital importancia diferenciar las dosis de fertilización que se aplicarán a cada cultivo en particular.

Las diferentes especies de plantas cultivadas tienen distintos requerimientos de nutrientes de acuerdo a las cantidades de los elementos minerales que estas absorben del suelo.

La cantidad de nutrientes que la planta necesita para producir un tonelaje determinado varía en su proporción y balance.

Considerar el potencial de rendimiento es muy importante.

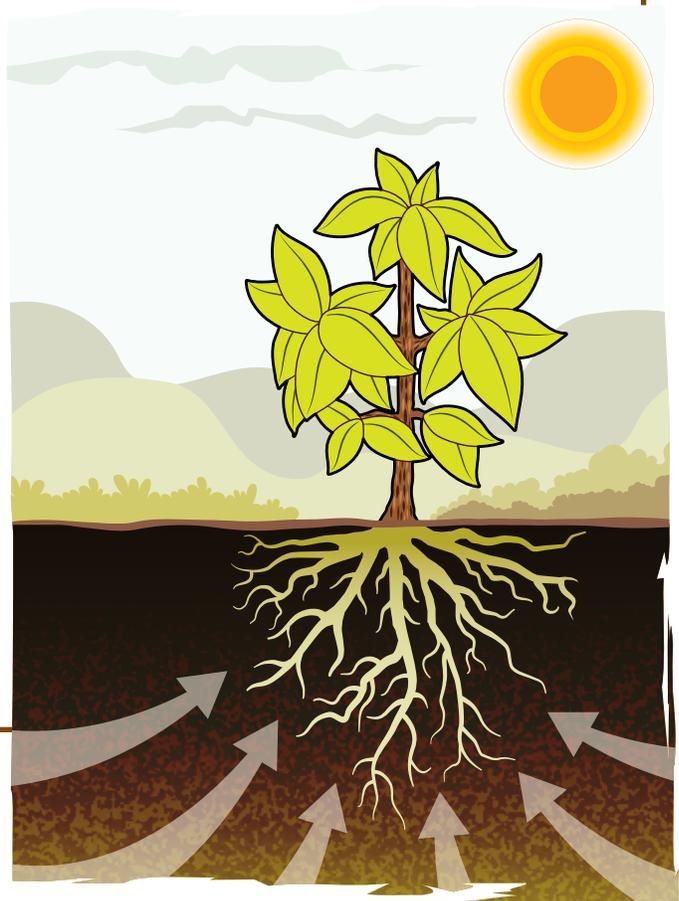
Por ejemplo; nunca se requerirá de la misma cantidad de nutrientes en un cultivo bajo riego, usando semillas mejoradas, que lo que absorbe el mismo cultivo bajo condiciones de temporal, usando semillas criollas de bajo potencial genético.

Así, la recomendación racional de fertilizante debe, por lo menos, reponer los nutrientes que se extraen de la parcelas, en la parte de la planta que se saca del campo después de la cosecha.

Además, la fertilización balanceada debe de incluir la reposición de los nutrientes, de acuerdo a una cantidad específica, para mantener las proporciones adecuadas de nutrientes en el suelo, que facilite la asimilación de nutrientes por las plantas y que busque incrementar la fertilidad y productividad del suelo.

Hay que recordar que las leguminosas, como el frijol común o frijol soya y los ejotes obtienen la mayor parte de su nitrógeno del aire.

[http://www.ipni.net/ppiweb/mexnca.nsf/\\$webindex/C341802D8B22A67D06256B5A00656E2B](http://www.ipni.net/ppiweb/mexnca.nsf/$webindex/C341802D8B22A67D06256B5A00656E2B)



## Dato curioso



### ¿Saben matemáticas las abejas?

Este hecho ya fue constatado por Pappus de Alejandría, matemático griego que vivió del año 284 al 305. Su afirmación se basaba en la forma hexagonal que imprimen a sus celdillas las abejas para guardar la miel. Las abejas, cuando guardan la miel, tienen que resolver varios problemas.

Necesitan guardar la miel en celdillas individuales, de tal manera que formen un mosaico sin huecos ni salientes entre las celdillas, ya que hay que aprovechar el espacio al máximo. Solo podrían hacerlo con triángulos, cuadrados y hexágonos.

¿Por qué eligieron entonces los hexágonos, si son más difíciles de construir?

La respuesta es un problema isoperimétrico (del griego "igual perímetro"). Pappus había demostrado que, entre todos los polígonos regulares con el mismo perímetro, encierran más área aquellos que tengan mayor número de lados.

Por eso, la figura que encierra mayor área para un perímetro determinado es el círculo, que posee un número infinito de lados. Por eso las abejas construyen sus celdillas de forma hexagonal, ya que, gastando la misma cantidad de cera en las celdillas, consiguen mayor superficie para guardar su miel. La pregunta es: ¿y quién le enseñó esto a las abejas?...

Texto: <http://www.elalmanaque.com/acertijos/mates.htm>

## ¿En qué vamos?

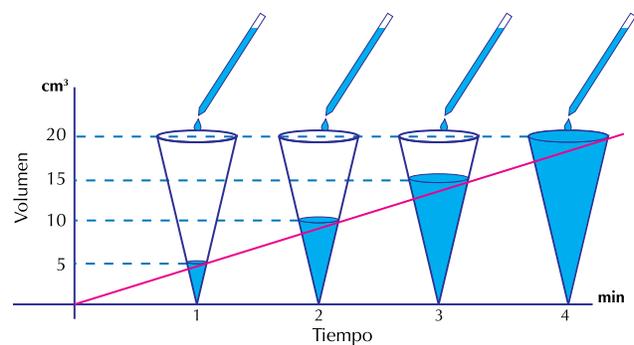


### Reflexiono y trabajo con mis compañeros

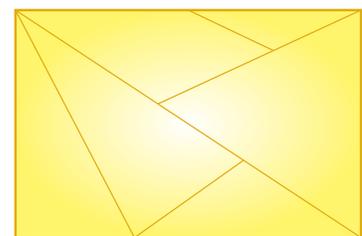
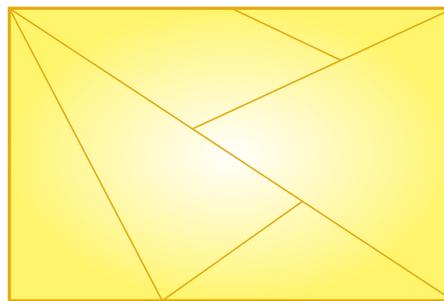
En tu cuaderno resuelve los ejercicios siguientes:

1. Escribe las parejas de medios y extremos en cada una de las proporciones
  - a)  $\frac{2}{5} = \frac{6}{15}$  Medios \_\_\_\_\_ Extremos \_\_\_\_\_
  - b)  $\frac{42}{12} = \frac{21}{6}$  Medios \_\_\_\_\_ Extremos \_\_\_\_\_
  - c)  $\frac{7}{11} = \frac{28}{44}$  Medios \_\_\_\_\_ Extremos \_\_\_\_\_
  - d)  $\frac{m}{n} = \frac{x}{y}$  Medios \_\_\_\_\_ Extremos \_\_\_\_\_
2. Comprueba la propiedad fundamental para las proporciones del punto 1.
3. Encuentra el valor desconocido en cada una de las proporciones:
  - a.  $\frac{\square}{8} = \frac{7}{4}$
  - b.  $\frac{12}{\square} = \frac{6}{20}$
  - c.  $\frac{100}{5} = \frac{\square}{2}$
  - d.  $\frac{32}{4} = \frac{8}{\square}$
4. Un vendedor de revistas vende 3 ejemplares cada 5 días. Si ha trabajado en la venta durante 30 días y mantiene la misma producción, ¿Cuántas revistas ha vendido?
5. Un automovilista viaja a 50 km por hora y tarda 3 horas en su recorrido, ¿qué tiempo tardaría en recorrer la misma distancia si viajara a 75 km por hora?

6. Observa la gráfica adjunta y elabora una tabla de datos con volumen y tiempo. Finalmente describe con tus palabras la situación en términos de magnitudes que no cambian y magnitudes que varían.



7. Con la ayuda de un compañero copia en cartulina o papel los dos rompecabezas que se presentan en la figura siguiente.



Enumera las piezas de los dos rompecabezas. Recorta por separado las figuras que componen los rompecabezas.

Elijan una pieza del rompecabezas reducido y compárenla con la misma pieza del otro rompecabezas. En tu cuaderno responde las preguntas siguientes:

- ¿Cuál es la diferencia entre las dos figuras?
- ¿Qué tienen igual las dos figuras?
- ¿Cómo son los ángulos?
- Midan cada una de las piezas con su correspondiente y digan si hay proporcionalidad directa en sus medidas.
- ¿Qué condiciones cumplen los lados y los ángulos de dos figuras que tienen la misma forma y diferente tamaño?

8. En un juego de cartas hay que repartir 48 cartas de una baraja. A cada jugador le corresponde el mismo número de cartas, sin que sobre alguna.

- ¿Pueden jugar 5 personas? o ¿6 personas?
- Escribe todos los casos posibles para diferentes números de jugadores y cuántas cartas le corresponden a cada uno. Puedes usar gráficos, tablas o explorar razones y proporciones.
- ¿La variación es directa o inversamente proporcional? ¿Por qué?

## Le cuento a mi profesor

Conversa con tu profesor sobre cuánto aprendiste en esta unidad.

Qué sé hacer	Superior	Alto	Básico	Bajo
Reconozco el efecto del cambio al medir magnitudes.	Siempre reconozco la proporcionalidad entre magnitudes.	Reconozco la proporcionalidad entre magnitudes, con dificultad en algunas.	Reconozco la proporcionalidad entre algunas magnitudes.	No reconozco la proporcionalidad entre algunas magnitudes.
Identifico los términos de una proporción.	Siempre identifico los términos de una proporción para aplicar la ley de las proporciones.	Identifico los términos de una proporción y aplico la ley de las proporciones en casi todos los casos.	Identifico los términos de una proporción, a veces, con alguna dificultad.	No identifico los términos de una proporción.
Resuelvo problemas que dan lugar al planteamiento de proporciones.	Planteo y resuelvo problemas sobre proporciones, con precisión.	Planteo y resuelvo problemas sobre proporciones.	Planteo y resuelvo algunos problemas sobre proporciones.	No tengo precisión al plantear y/o resolver problemas sobre proporciones.

## Participo y aprendo

Lee el enunciado y señala con una x la categoría correspondiente, según lo que has aprendido.

Participo y aprendo	Siempre	Casi siempre	A veces	Nunca	¿Qué debo hacer para mejorar?
Me preocupo por resolver las tareas.					
Comparto información con mis compañeros.					
Respeto a mis compañeros cuando intervienen en clase.					
Trato con respeto a las personas con quienes me comunico.					
Escucho los planteamientos de mis compañeros.					
Le explico a algún compañero aquello que yo sé y que él no entiende.					
Dedico tiempo para repasar en casa.					
Participo activamente en la clase.					
Reconozco la ayuda que me brinda mi profesor(a).					

# Sistemas de datos

## Resolvamos

La ciencia se ocupa en general de fenómenos observables. La ciencia se desarrolla observando hechos, formulando leyes que los explican y realizando experimentos para validar o rechazar dichas leyes.

Los modelos que crea la ciencia son de tipo determinista o aleatorio.

La Estadística se utiliza como tecnología al servicio de las ciencias donde la variabilidad y la incertidumbre forman parte de su naturaleza.

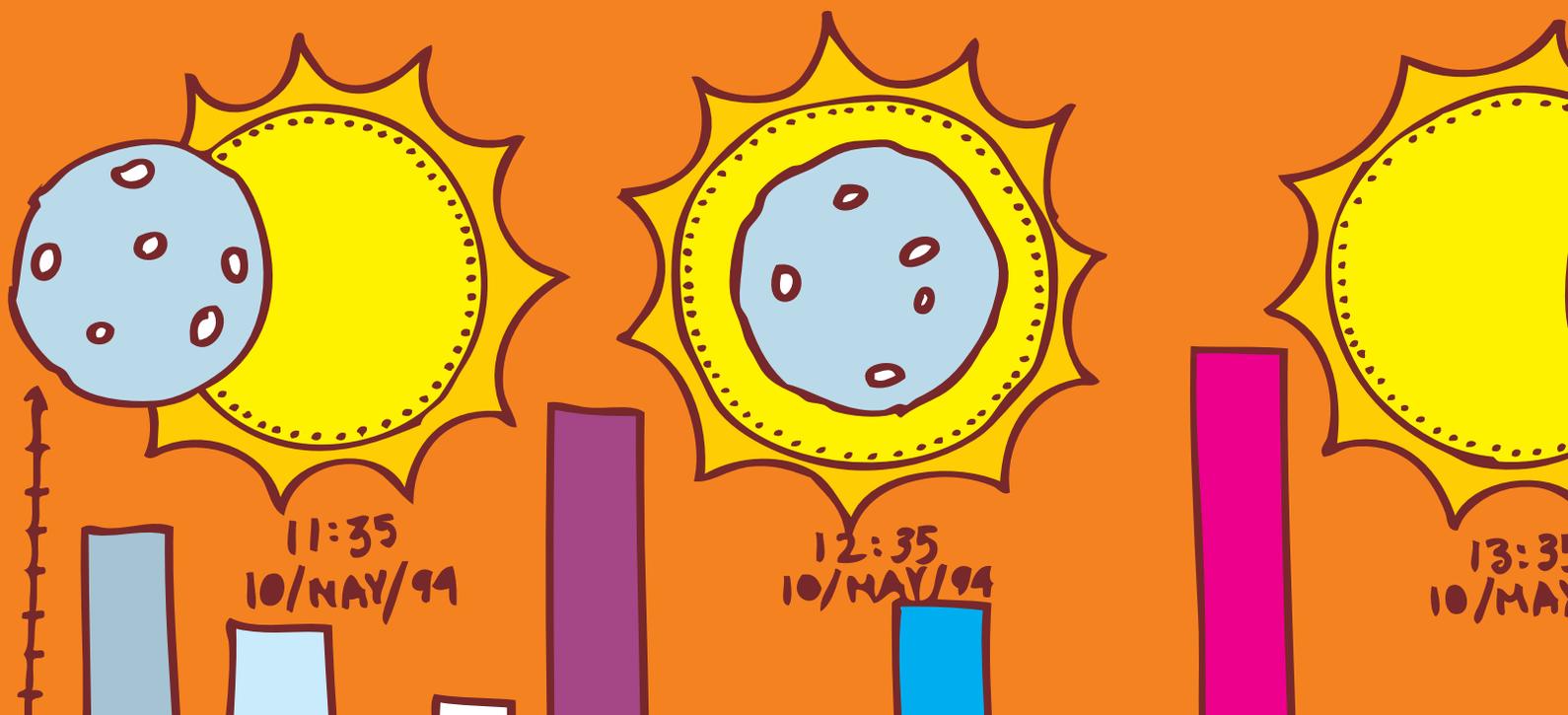
*“La Bioestadística enseña y ayuda a investigar en todas las áreas de las ciencias de la Vida donde la variabilidad no es la excepción sino la regla”*

*Carrasco de la Peña (1982)*

Tomado de: <http://www.bioingenieria.edu.ar/academica/catedras/introprob/unidad-8.pdf>

Según lo escrito en el recuadro superior es de esperar que la Estadística sea una herramienta indispensable en todo proyecto y estudio científico.

Los periódicos y revistas nos llegan llenos de gráficas estadísticas, especialmente en las noticias económicas, mostrándonos el comportamiento del dólar, del precio de la gasolina o del petróleo.



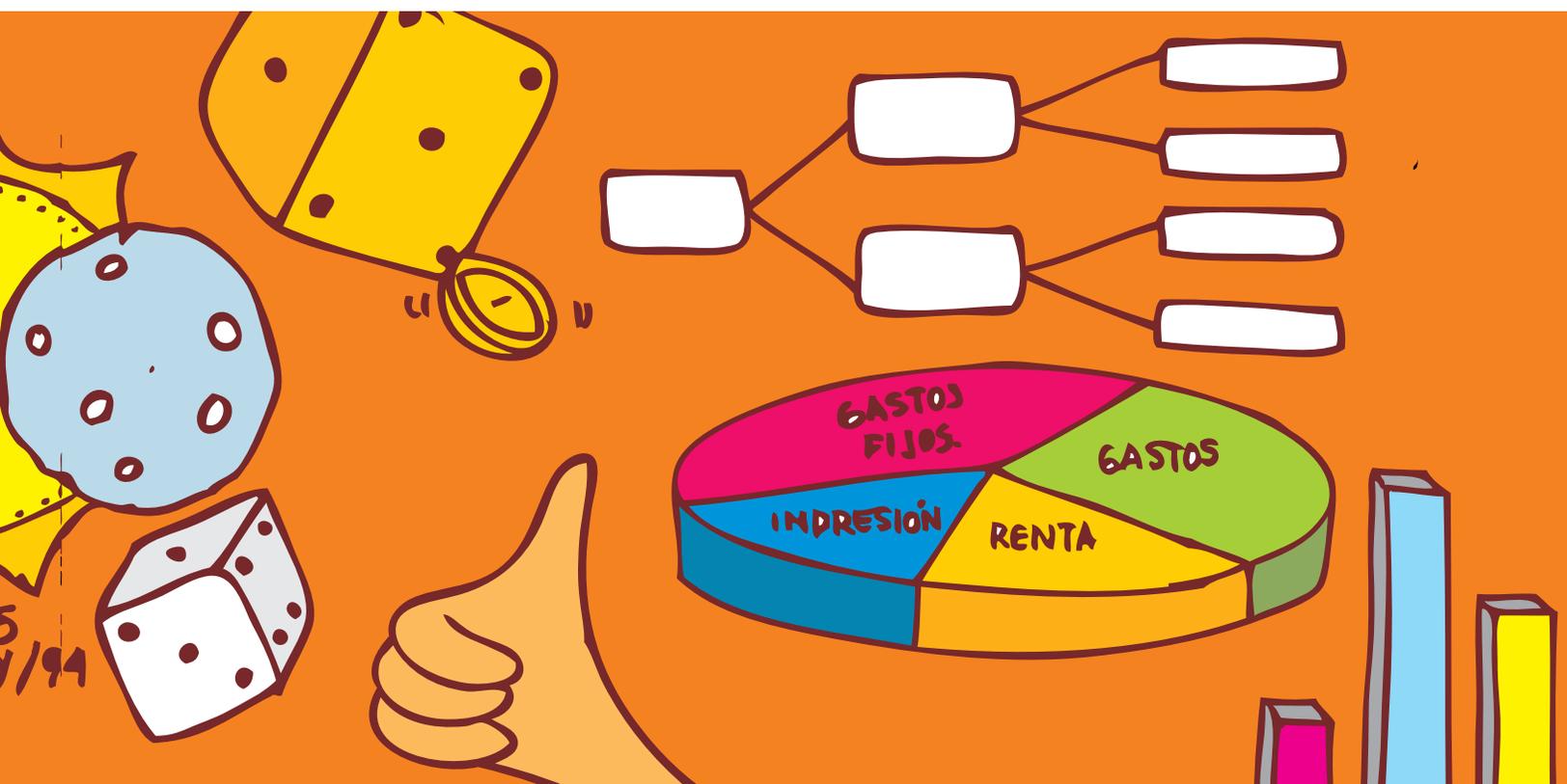
En la vida cotidiana, a veces nos hacen preguntas que involucran ideas estadísticas, así sea de manera sencilla.

Para responder con habilidad a estas preguntas es necesario solicitar y manejar adecuadamente una serie de datos directamente relacionados con la pregunta que se investiga. ¿Lo has realizado alguna vez?

Por ejemplo:

- ¿Con qué frecuencia llueve en la población en donde tu vives?
- ¿Qué es más frecuente, el nacimiento de niños o el de niñas?
- ¿Qué actividad realizas con mayor frecuencia?

Referentes de calidad	Capítulos
<b>Estándares</b>	1. Términos básicos, tabulación, representaciones gráficas y Medidas de centralización.
Comparo e interpreto datos provenientes de diversas fuentes (prensa, revistas, televisión, experimentos, consultas, entrevistas).	
Resuelvo y formulo problemas a partir de un conjunto de datos presentados en tablas, pictogramas, diagramas de barras e histogramas.	
Reconozco la relación entre un conjunto de datos y su representación.	
Uso medidas de tendencia central (media, mediana, moda) para interpretar comportamiento de un conjunto de datos.	



# Términos básicos, tabulación, representaciones gráficas y Medidas de centralización

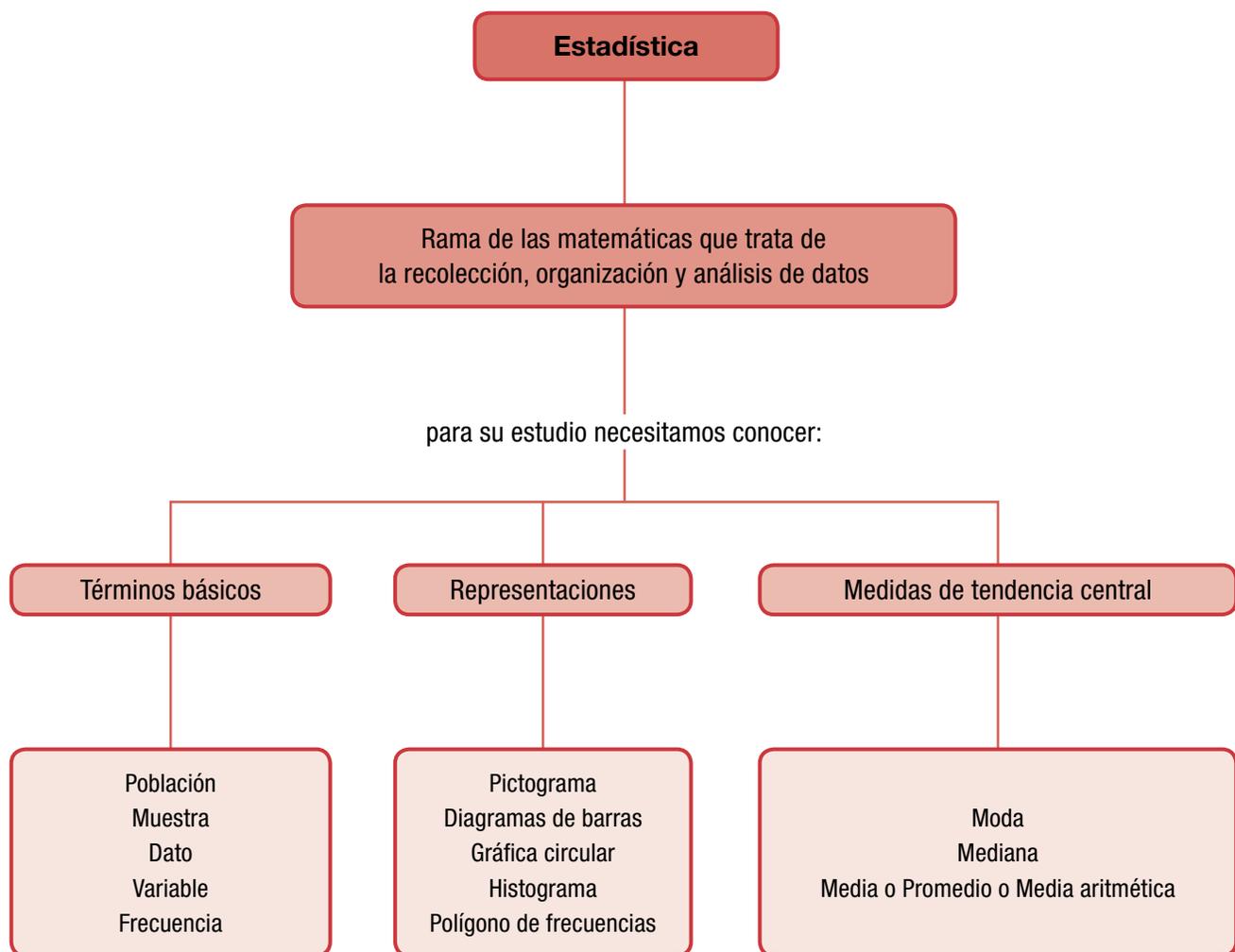
Las actividades que día a día realizan los habitantes de una comunidad o sociedad se llevan en registros (anotaciones), son ejemplos de éstos los nacimientos, las defunciones, los casamientos, etcétera.

El conteo y medición de tales hechos genera una gran cantidad de información que hace necesario ordenarla, clasificarla y analizarla para saber qué dicen de su comportamiento en un período de tiempo.

Las instituciones correspondientes dan a conocer esta información por medio de tablas y gráficas para que la población tenga conocimiento de cuál ha sido su desarrollo.

Esto hace resaltar la importancia del manejo y tratamiento de la información.

¿Te has detenido, alguna vez a pensar en cuáles actividades de la vida cotidiana hay necesidad de utilizar la estadística?



# Tema 1.

## Términos básicos de la estadística



**Indagación**  
¿Preguntémonos qué estudia la Estadística?

Ya desde cursos anteriores has tenido contacto con la estadística en tu asignatura de Matemáticas.

Para estudiar una situación científica o social, debemos obtener información y lo primero que debemos determinar es dónde y cómo recogerla. La recolección de información podemos realizarla mediante preguntas o encuestas.

Averígualo a cada uno de tus compañeros de curso cuál es su deporte favorito.

En tu cuaderno anota las respuestas que tus compañeros te suministren.



Observa los datos obtenidos, cuenta los votos de cada deporte y responde:

- ¿Cuál es el deporte que obtuvo más votos?
- ¿Cuál deporte obtuvo menos votos?



**Conceptualización**

¿Sabes con qué finalidad se da “muestra gratis” de algún producto que se vende?

Generalmente, el propósito es dar a conocer la calidad de ese producto ya que la muestra presenta sus características principales.

### Población y muestra



Supongamos que en la cuadra de una calle hay 10 familias y que un entrevistador, debe elegir al azar (a la suerte), a tres de ellas. ¿Cómo decidirías a cuáles familias entrevistar?

Un método que se podría utilizar es el uso de una urna, escribir en tarjetas el número de las casas en donde habitan las familias, doblarlas, ponerlas en la urna o caja y proceder a extraer 3 de ellas, sin volverlas a colocar dentro de la urna.

Esta sería la manera de asegurar que las familias entrevistadas sean diferentes y seleccionadas al azar (a la suerte). En este caso, las 100 familias son la población y las 3 familias elegidas al azar conforman la muestra.

Para poder sacar conclusiones confiables sobre una población, se debe estar seguro de que la muestra elegida ha sido tomada adecuadamente (sin preferencias) y representa la población en la que se está interesado.

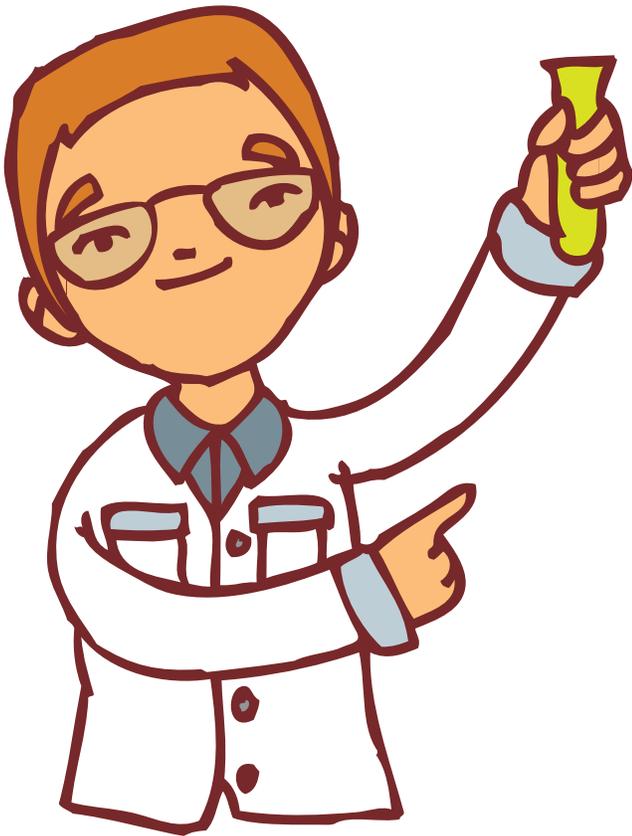
Ahora bien, en la práctica se usa la letra  $n$  minúscula para representar la medida de la muestra y  $N$  mayúscula para representar el número de la medida de la población.

Así en el caso de la entrevista a las familias tenemos que:

$$N = 100 \text{ (población)}$$

$$n = 3 \text{ (muestra)}$$

A continuación se analizan algunas situaciones que van a ayudar a identificar los términos básicos de la estadística.



1. En un laboratorio se tomó una muestra a 50 pacientes y se observó que 30 de ellos tenían amibas. ¿Cuántos pacientes podrían tener amibas en una población de 1,500 personas que se someten a un análisis de laboratorio?

**Solución**

Identifiquemos términos importantes:

$$\text{Población: } N = 1,500$$

$$\text{Muestra: } n = 50$$

$$\text{Pacientes con amibas} = 30 \text{ de } 50$$

Estableciendo la proporción tenemos:

De 50 pacientes, 30 tienen amibas, de 1,500 pacientes ¿cuántos tendrán?

$$\frac{50}{30} = \frac{1500}{\square}$$

Y aplicando la ley fundamental de las proporciones, se tiene:

$$= \frac{1500 \times 30}{50} = 900$$

Por lo tanto, se puede deducir que probablemente haya 900 pacientes que tengan amibas.

2. En una fábrica de llantas se tomó una muestra a 75 llantas de una producción de 2,000; si se encontraron 3 defectuosas, ¿cuántas llantas defectuosas podrían hallarse en toda la producción?

Veamos:



$$N = 2,000$$

$$n = 75$$

$$\text{Defectuosas} = 3$$

Estableciendo la proporción se tiene:

$$\frac{75}{3} = \frac{2,000}{\square}$$

$$\square = \frac{2,000 \times 3}{75} = 80$$

Por lo tanto, se puede inferir (deducir) que probablemente haya 80 llantas defectuosas en toda la producción.

El hacer estudios estadísticos sobre una parte de la población tomada a la suerte, se llama “muestreo” y tiene algunas ventajas tales como: el bajo costo, el ahorro de tiempo, la facilidad para realizar la investigación y el análisis de resultados.

Para recoger la información que necesitas recopilar, nos valemos de formatos o formularios que en estadística se les llama “instrumentos”. Y pueden ser:

### Encuestas y censos

La encuesta es la captación (obtención), de hechos, opiniones, juicios y motivaciones sociales, de una manera conscientemente, planeada y registrada en cuestionarios.

Los datos se consiguen a través de la respuesta oral o escrita a una serie de preguntas formuladas a un determinado círculo de personas.



Las encuestas tienen como objetivo obtener información de importancia para la planeación nacional en rublos (valores, datos) tales como: producción agrícola y uso de la tierra, desempleo y tamaño de la fuerza de trabajo, producción nacional, precios de mayoreo y menudeo, condiciones de salud del pueblo, ingresos y gastos.

### Censos



La boleta censal es un formulario integrado con los datos más importantes de los miembros de un grupo, por ejemplo: nombre, edad, sexo, estado civil, nacionalidad, lugar de nacimiento, idioma, características económicas, educativas, religiosas, etc.

Se usa en el estudio de cómo se presenta un fenómeno dado en la población de un país, una fábrica, una escuela, etc.

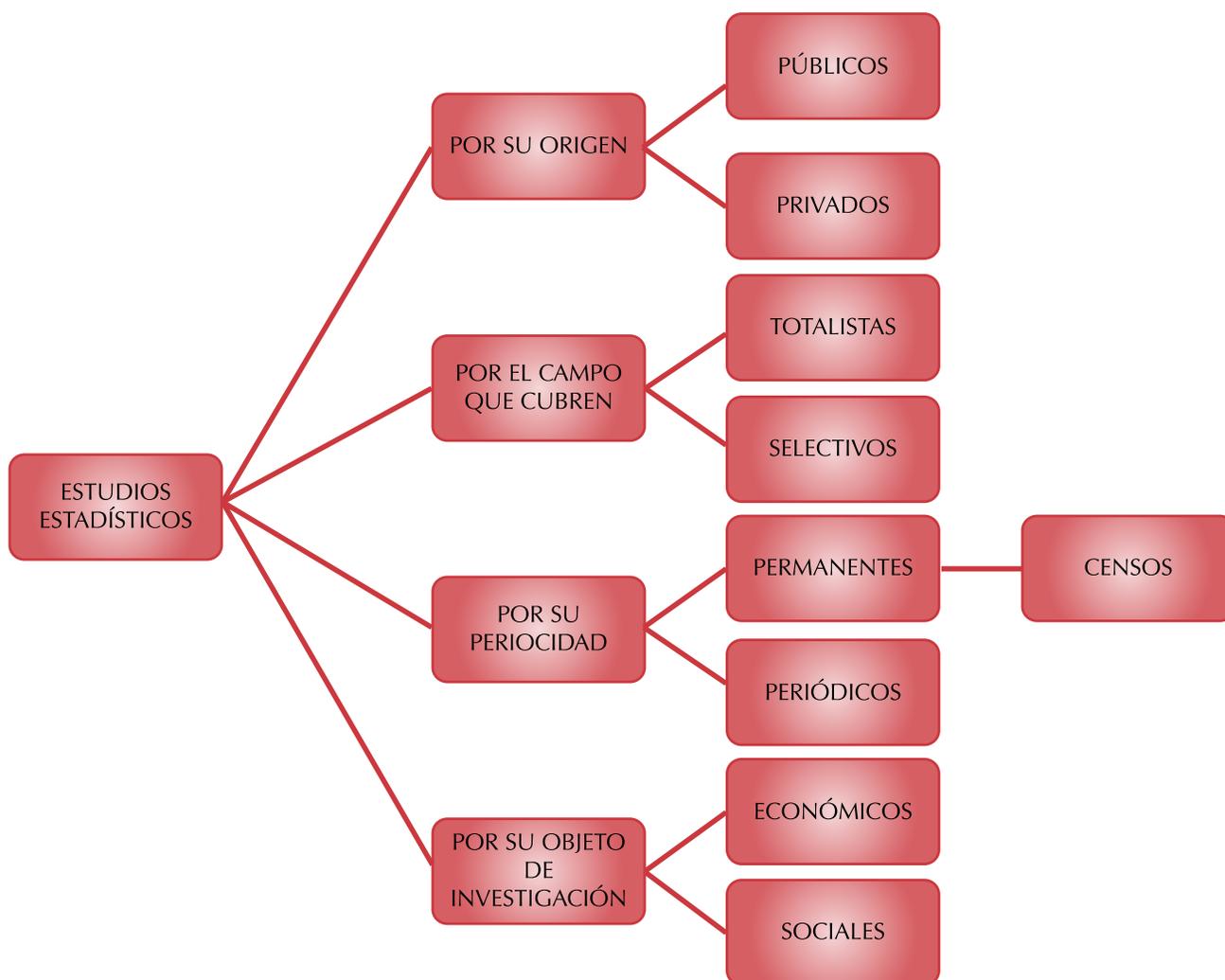
Los censos dan un conocimiento, medianamente exacto, de la extensión y la densidad, la composición religiosa, económica, educativa, el porcentaje de nacimientos, defunciones y matrimonios, las esperanzas de vida y otras características de una población.

También proporcionan un conocimiento de los cambios cuantitativos que sufrió, en el curso del tiempo, una población en cada uno de los aspectos anteriores, los cuales ya habrían sido estudiados en censos previos.

### Estudios estadísticos

¿Cómo podemos realizar un estudio estadístico?

En la actualidad, se ha hecho familiar el empleo de técnicas estadísticas para el estudio de los problemas sociales; de tal forma que se han clasificado como se muestra a continuación:



Estudia detenidamente el cuadro anterior y coméntalo con algunos compañeros.

En Colombia, la entidad que se encarga de la recopilación, organización y análisis los datos relacionados con los aspectos económicos y sociales en general (Educación, costo de vida, natalidad y mortalidad, etc.) es el Departamento Nacional de Estadística, conocido como DANE.

La información del DANE está al servicio del público en general. Quien necesite o quiera conocer algún dato de Colombia puede consultar a través de los medios siguientes: Banco de datos, telefónicamente, página WEB, [www.dane.gov.co](http://www.dane.gov.co), correo tradicional, correo electrónico, fax, suscripciones a boletines y publicaciones.

### Tabulación de datos

Estudiamos el caso siguiente en el que se muestra la organización de los datos.

En una fábrica de motocicletas se obtuvo la siguiente producción durante los 25 días de trabajo de un mes. Cuando se recolecta determinada información, lo primero que se hace es organizar los datos y elaborar una tabla.

140	152	146	140	160
155	149	152	148	147
150	141	146	152	157
148	155	152	160	148
160	140	152	148	155

Como se puede apreciar, los datos están en desorden.

Para facilitar su estudio, es conveniente ordenarlos en forma decreciente (de mayor a menor), como se ve a continuación:

160	155	152	148	146
160	155	152	148	141
160	152	150	148	140
157	152	149	147	140
155	152	148	146	140

En muchas actividades del género humano se requiere realizar encuestas o recopilar datos para posteriormente organizarlos y efectuar el análisis de la información obtenida.

El análisis de los datos sirve para: saber con qué se cuenta y qué hace falta.

En general, para evaluar los procesos, mejorar las áreas donde se detecten errores, elevar las condiciones de vida de la población y en general, tomar decisiones.

### Tabulación

Para facilitar la observación del comportamiento de los datos, éstos se presentan de forma ordenada en una tabla, en donde se registra el número de veces que se repite un dato, mediante una “rayita”.

En esta nueva tabla, cada dato se escribe una sola vez y cuando aparezca de nuevo, solamente se marca la rayita.

Para contar rápidamente, se acostumbra marcar hasta 4 veces con rayitas verticales y la quinta hacerla atravesada, haciendo así montones de cinco.

Al registro de este conteo se le llama tabulación. A continuación se presenta la tabulación de algunos casos:

1. Realicemos la tabulación en el caso de la fabricación de las motos:

Producción de motocicletas	Conteo
160	
157	
155	
152	—   —
150	
149	
148	
147	
146	
141	
140	

Una vez que ya están ordenados los datos, es más fácil observar que la mayor producción es 160 (número mayor) y la menor es 140 (número menor), y que la variación (diferencia entre ellos) es de 20, esto es,  $160 - 140 = 20$ .

A la diferencia entre los datos mayor y menor se le llama técnicamente **oscilación o rango (R)**.

$$R = 160 - 140 = 20$$

Podemos decir, entonces, que la producción durante ese mes oscila o varía entre 160 y 140 motocicletas.

Esta y otras observaciones que se realicen en la tabla pueden aprovecharse para mejorar el proceso de producción de la motos.

2. La Secretaría de Educación de un municipio colombiano investigó cuántos iletrados (personas que no saben leer ni escribir) había en 30 veredas, los datos obtenidos fueron los siguientes:

7	8	7	8	7	7
6	9	8	7	7	8
7	7	8	9	8	8
7	8	9	7	7	10
7	10	7	10	7	7

Al ordenarlos en forma decreciente (de menor a mayor, se tuvo:

10	8	7
10	8	7
10	8	7
9	8	7
9	7	7
9	7	7
8	7	7
8	7	7
8	7	7
8	7	6

### Tabulación

Iletrados por vereda	Conteo
10	I
9	I
8	—III—
7	—III III—
6	I
<b>Total</b>	<b>30</b>

En la tabla de tabulación se observa que el mayor número de iletrados en las veredas estudiadas es de 10 y el menor, 6; así que la oscilación o rango es:

$R = 10 - 6 = 4$ , porque el número de iletrados varía entre 10 y 6.

Del análisis de los datos organizados y registrados en la tabla se pueden desprender decisiones importantes para continuar en la lucha por acabar con este problema en las veredas investigadas.

Por tanto, se concluye que:

***La organización de datos y su tabulación resultan útiles en el proceso de presentación, análisis y tratamiento de la información.***

### Frecuencias

#### Frecuencias absolutas simples

En los grandes centros de población es muy común que haya una mayor afluencia de vehículos circulando a determinadas horas, llamadas horas pico y en ciertas vías o avenidas.

La recopilación de esos datos, su agrupación, conteo y registro en tablas sirve a las autoridades para decidir cuáles medidas se deben tomar en cuanto al sentido de las calles, colocación de semáforos, puentes peatonales, vigilancia, etc., para evitar grandes congestiones de vehículos, así como pérdida de tiempo y molestias a quienes transiten por la ciudad.

Analizamos el siguiente estudio en el que aparecen los datos que se obtuvieron contando el número de vehículos que cruzan cierta calle cada cinco minutos.

28	32	24	26	23	23	30	25
34	30	32	25	25	20	25	37
39	34	36	28	24	26	26	24
24	20	22	28	29	26	27	27
26	31	33	31	28	38	28	27

Al ordenar los datos en forma decreciente (de mayor a menor) y registrar el conteo en una tabla se obtiene la tabulación:

**Tabulación**

Vehículos	Conteo
39	
38	
37	
36	
34	
33	
32	
31	
30	
29	
28	
27	
26	
25	
24	
23	
22	
20	
<b>Total</b>	<b>40</b>

Realizado el conteo, se agrega, a la tabla, una columna que indica el número de rayitas de cada dato o marca. A esta nueva columna se conoce con el nombre de frecuencia absoluta o frecuencia absoluta simple.

Vehículos	Conteo	Frecuencia absoluta $f_i$
39		1
38		1
37		1
36		1
34		2
33		1
32		2
31		2
30		2
29		1
28		5
27		3
26		5
25		4
24		4
23		2
22		1
20		2
<b>Total</b>	<b>40</b>	<b>40</b>

Así observamos que por ejemplo, el dato 28 está 5 veces en el conjunto de datos, por lo tanto, en la columna de conteo aparecen 5 rayitas frente al 28 y en la columna de frecuencia absoluta se ha escrito el número 5.

Considerando todo lo anterior, se aprecia que:

**La frecuencia absoluta simple ( $f_i$ ) de un dato estadístico, es el número de veces que aparece en un conjunto de datos, llamado también distribución de datos.**

**Frecuencias absolutas acumuladas**

Con el caso anterior de los vehículos, hemos realizado el conteo y la tabulación de las frecuencias absolutas simples.

Ahora, veamos que es posible ir acumulando las frecuencias sumando cada una con sus anteriores.

Vehículos	Conteo	Frecuencia absoluta $f_i$	Frecuencia absoluta acumulada $F_i$
39		1	(no tiene anterior) 1
38		1	(1+su anterior = 1+1) 2
37		1	(1+sus anteriores = 1+1+1) 3
36		1	(1+sus anteriores = 1+1+1+1) 4
34		2	(2+sus anteriores = 2+1+1+1) 6
33		1	7
32		2	9
31		2	11
30		2	13
29		1	14
28		5	19
27		3	22
26		5	27
25		4	31
24		4	35
23		2	37
22		1	38
20		2	40
<b>Total</b>	<b>40</b>	<b>40</b>	

Observa que la columna de las frecuencias acumuladas no se totaliza puesto que la última frecuencia simple, sumada con las anteriores, da el total de elementos del conjunto ordenado.

### Gráficas estadísticas

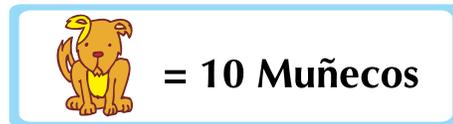
Una vez recogida la información y habiendo tabulado los resultados, en su tabla de frecuencias, es muy conveniente poder plasmarlos en gráficas, que nos permiten una mejor visualización y facilidad para interpretarlos, de tal modo que pueda llegarse a una correcta toma de decisiones.

#### 1. Pictogramas

Estudiemos la situación de un taller que produce muñecos de felpa o peluches.

Un taller que fabrica muñecos de peluche, quiere informar la cuenta de sus piezas producidas en los últimos cuatro meses. Para ello se vale de un pictograma así.

1 perrito representa 10 muñecos de peluche.



Observa cuál fue la producción alcanzada (número de peluches fabricados) en cada mes, según el cuadro adjunto.

Meses	Perritos	Nº Peluches
1º mes		30
2º mes		40
3º mes		15
4º mes		20

En los pictogramas, los valores representados a través de un dibujo, tienen un valor determinado o previamente asignado o acordado.

Este tipo de gráfica es fácil de elaborar e interpretar y, por esta razón, se emplea cuando las personas a quienes se dirige no tienen conocimientos de estadística.

#### 2. Gráfica de barras

Para construir una gráfica de barras, analicemos la situación siguiente:

El orientador de una escuela secundaria realizó una encuesta para conocer las preferencias de los estudiantes en relación con las asignaturas que cursan.

Asignatura	
Matemáticas	(M)
Español	(E)
Civismo	(C)
Historia	(H)
Geografía	(G)
Biología	(B)
Inglés	(I)

Los datos obtenidos son los siguientes:

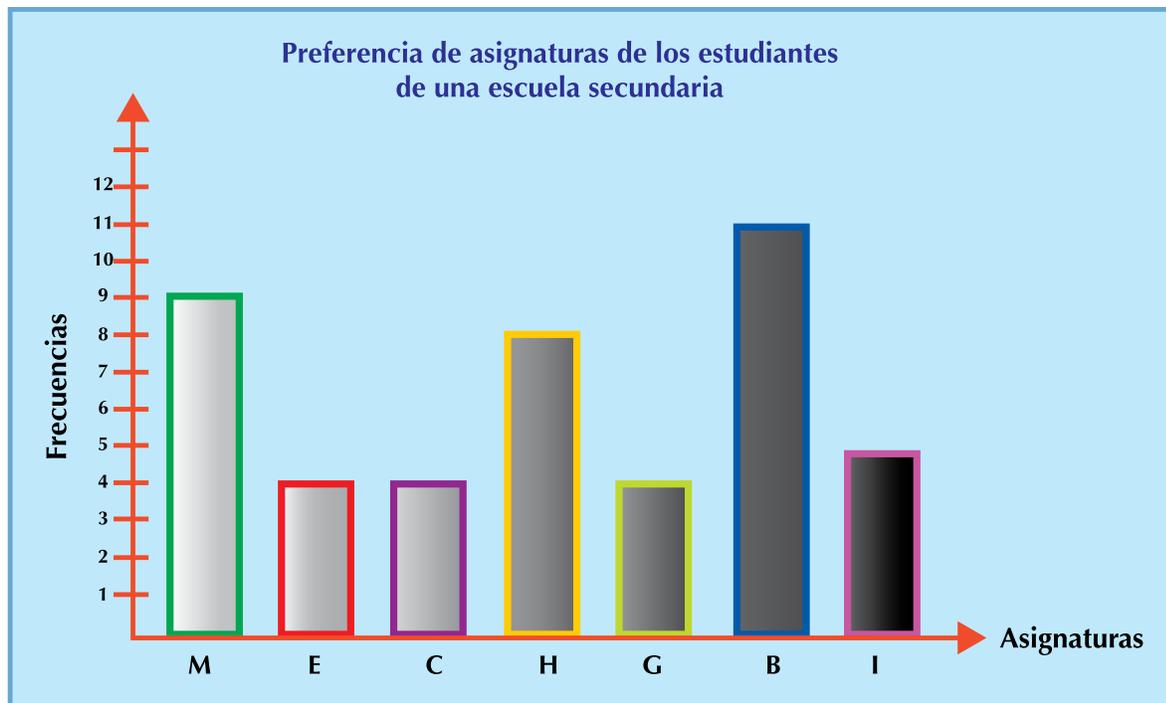
M,	B,	I,	M,	M,	B,	B,	B,	B,
B,	M,	I,	H,	H,	C,	I,	G,	E,
B,	G,	G,	H,	H,	C,	C,	E,	E,
B,	H,	B,	M,	I,	H,	B,	G,	E,
B,	M,	I,	H,	H,	M,	M,	C,	M.

El orientador de la escuela, organiza los datos en una tabla de frecuencias, así:

- Se trazan dos ejes perpendiculares.
- Se escribe una escala de valores o *frecuencias* sobre el eje vertical ( $\uparrow$ ), y los *datos* sobre en el eje horizontal ( $\rightarrow$ ).

Asignaturas		
Matemáticas	(M)	9
Español	(E)	4
Civismo	(C)	4
Historia	(H)	8
Geografía	(G)	4
Biología	(B)	11
Inglés	(I)	5
<b>Total</b>		<b>45</b>

Se trazan rectángulos o barras del mismo ancho sobre el eje horizontal, dejando un mismo espacio entre ellos. La longitud de cada barra representa el número de frecuencias, como muestra la gráfica siguiente:



### 3. Histograma

El orientador puede representar el resultado de sus averiguaciones en una gráfica, en el plano cartesiano, pero sin dejar espacio entre las barras.

Una gráfica cartesiana de barras pegadas recibe el nombre de histograma y se construye tomando el eje horizontal o eje de las X, del plano cartesiano para la variable o datos y el eje vertical o eje de las Y para las frecuencias.

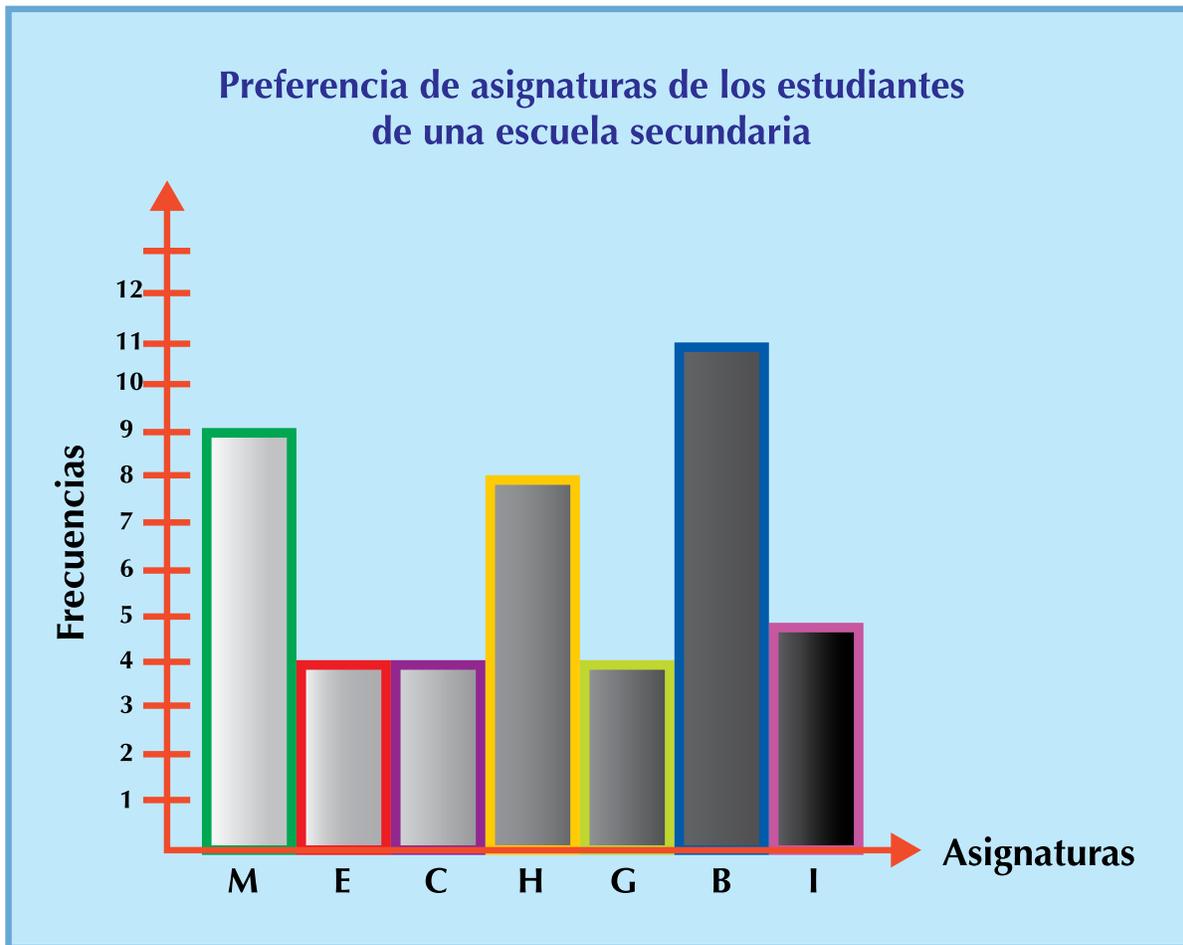
Los histogramas pueden utilizarse para mostrar el comportamiento tanto de datos agrupados, es decir por intervalos, como para datos no agrupados, es decir, datos registrados de manera individual.

El orientador del colegio presentó su informe en un histograma así:

Nótese que las bases de los rectángulos son iguales, es decir, tienen el mismo ancho porque la amplitud es la misma y, además, los rectángulos quedan contiguos. A esta gráfica se le llama **histograma**, porque se usan rectángulos cuyas áreas son proporcionales a las frecuencias, esto es, teniendo la base igual, a mayor frecuencia mayor altura del rectángulo y a menor frecuencia corresponde rectángulo de altura menor.

Recuerda que:

**Un histograma se construye por medio de rectángulos unidos, cuyas bases indican el nombre de la variable (datos) y cuyas alturas indican las frecuencias absolutas o número de veces de cada dato.**



Tanto en el diagrama de barras como en el histograma, el orientador de la escuela puede encontrar información como:

- ¿Cuál es la asignatura preferida por los estudiantes?
- ¿Cuál es la asignatura que menos gusta a los estudiantes?
- Discútelos con tus compañeros.

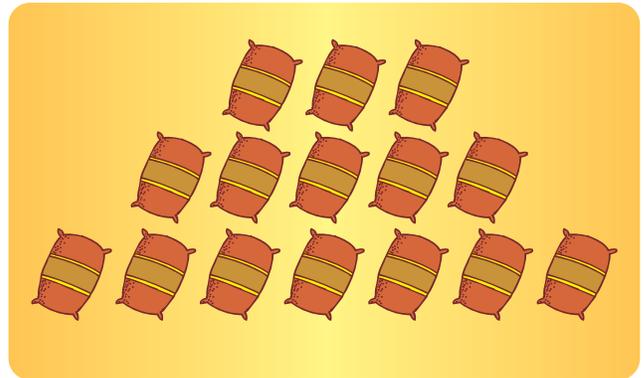


### Aplicación

Copia los ejercicios en tu cuaderno, resuélvelos y compara tus resultados con los de tus compañeros.

1. En un depósito de bultos de café se escogió un dibujo o ícono  para representar la entrada de 12 bultos. Los conteos que se registraron así: Sabiendo que:  = 12 bultos

- a. ¿Cuántos bultos entraron al depósito?
- b. Inventa una forma de registrar el conteo de algún producto de tu vereda, utilizando un dibujo o ícono.
- c. ¿Conoces algún nombre para ese tipo de representación?
- d. Comparte tu experiencia con algunos compañeros.



2. Si para representar las ventas de televisores de un centro comercial se usa un pictograma en el cual el ícono o dibujo escogido es  y representa una venta de 10 televisores. ¿Cuántos televisores muestra que se vendieron en mayo, representados en la fila siguiente?

Mayo 

3. El señor Martínez tiene una huerta en la que hay manzanos. Para hacer un estudio de la producción de los cuatro años anteriores, cuenta con los siguientes datos.

1997 - 8,500 manzanas  
 1998 - 11,000 manzanas  
 1999 - 7,250 manzanas  
 2000 - 10,500 manzanas

Elabora un pictograma en el que:

 = 500 manzanas

Revisa tu gráfica con otros compañeros, si encuentras diferencias, discútanlas.

4. El comité de la cooperativa escolar analiza las ganancias mensuales del pasado año, que a continuación se presentan:

Febrero	\$ 10,000
Marzo	\$ 15,000
Abril	\$ 12,000
Mayo	\$ 17,000
Junio	\$ 9,000
Agosto	\$ 10,000
Septiembre	\$ 14,000
Octubre	\$ 11,000

- Elabora un pictograma escogiendo un dibujo que represente \$2,000 de ganancia.
- Ordena los meses de menor a mayor, según su ganancia obtenida.
- Calcula el rango de ganancias.

5. Dado el conjunto de datos con un diagrama de barras.

16, 10, 18, 12, 17, 10, 17, 22, 13, 21,  
16, 11, 23, 17, 15, 20, 11, 13, 21, 15,  
23, 20, 15, 21, 22.

- Ordena el conjunto de manera ascendente, es decir de menor a mayor.
- Calcula el rango de los valores del conjunto.
- Representa el conjunto en un diagrama de barras.
- Construye un histograma que muestre el conjunto.

6. Un alumno de primer año de secundaria es de los más pequeños de su grupo que tiene por 30 alumnos y desea investigar la altura de sus compañeros para situarse con precisión entre ellos.

Así, mide las estaturas en centímetros de sus compañeros integrantes del grupo y obtiene los datos:

157, 148, 138, 145, 160, 162, 150, 158, 133, 157,  
153, 149, 151, 152, 143, 145, 138, 159, 146, 147,  
152, 152, 152, 157, 160, 146, 138, 147, 136, 151.



El alumno mide 138 cm y ya incluyó en los datos su altura.

- Ordena todos los datos de menor a mayor.
- Encuentra la oscilación o rango.
- ¿Cuántos alumnos son más altos que él?
- ¿Cuántos son más bajos que él?
- ¿Cuántos miden lo mismo que él?
- ¿Cuál es la estatura que predomina?
- Agrupar las estaturas en 6 intervalos.
- Elabora una tabla con el conteo y las frecuencias absolutas.
- Construye el histograma representativo del grupo de estudiantes.

7. Se quiere fotocopiar un documento que tiene 45 páginas debidamente numeradas.

Si el precio de una fotocopia es de \$30.

- ¿Qué precio se pagará por 2, 4, 6, 7, 9, 11, 14, 18, 21 y 33 copias?
- Ordena los precios de mayor a menor.
- Encuentra el rango u oscilación de los precios.
- Haz la tabla de frecuencias absolutas.
- Elige una gráfica para representar la situación.



## Entendemos por...

**Inferir** sacar conclusiones o deducir de algo.

Por ejemplo: Dada una gráfica, interpretar sacar conclusiones de ella o deducir algo es haber inferido.

## Diversión matemática

### Señales de tránsito

Las señales de tránsito son nuestra guía en las calles y caminos.

Nos indican distancias entre ciudades, curvas, puentes y todo aquello que como conductores necesitamos para informarnos sobre el camino que recorremos.

Garantiza que personas de diversas lenguas y culturas puedan interpretar los mensajes.

Hay tres clases de señales de tránsito:

AMARILLAS Preventivas,  
ROJAS reglamentarias y  
AZULES informativas.

SP-11



**Preventivas**  
Sirven para avisarnos de peligros que vamos a encontrar.

SR-01



**Reglamentarias**  
Nos recuerdan que debemos obedecer.

SI-18



**Informativas**  
Nos indican que un poco adelante se ofrece un servicio.

Cada grupo se distingue por su forma y por sus colores predominantes.

Observa que el color predominante de las señales preventivas es el amarillo, el de las señales reglamentarias es el rojo y el de las señales informativas es el azul.

Tomado de: <http://conduzca.galeon.com/normas.html>

Diviértete clasificando las señales de tránsito que veas por donde andes.

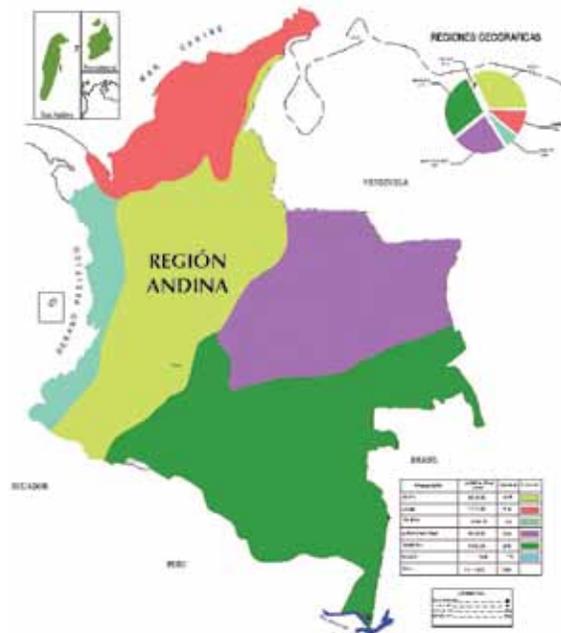
## Día a día

### La Región Andina de Colombia

La Región Andina de Colombia es la zona más poblada del país y la zona económicamente más activa de toda la cordillera de los Andes, con alrededor de 34 millones de habitantes; coincide con la parte septentrional de los Andes. Las poblaciones de cada región del país pueden representarse ya sea con pictogramas, diagramas de barras o histogramas.

Se orienta del suroccidente al nororiente, entre Ecuador y Venezuela.

Dentro del territorio de Colombia se divide en tres cordilleras, Occidental, Central y Oriental, que dan lugar a numerosos valles, cañones, mesetas y un sistema fluvial cuyos principales ríos son el Cauca y el Magdalena.



Tomado de: [http://es.wikipedia.org/wiki/Regi%C3%B3n\\_Andina\\_\(Colombia\)](http://es.wikipedia.org/wiki/Regi%C3%B3n_Andina_(Colombia))

## Tema 2.

# Interpretación de las medidas de centralización



### Indagación

#### La moda

Si vas por una calle, parque o plaza por donde circula mucha gente y observas que un gran número de personas (hombres y mujeres) llevan puesta una prenda azul ya sea pantalón, camisa, falda, blusa, bufanda, etc. ¿Con qué palabras podrías describir este fenómeno?

Indágalo con algunos compañeros(as).

Reúnete con algunos compañeros(as) y hablen en torno a lo que está de moda: en la música, en la ropa, en los juguetes, en las bebidas, etc.

¿Cómo se sabe que algo está de moda?

Tomen nota de las opiniones de todos y saquen una conclusión.



### Conceptualización

Analicemos las situaciones siguientes:

1. Jairo está haciendo una encuesta sobre los gustos de las personas y una de sus preguntas está dirigida a averiguar el tipo de música escuchan con más frecuencia, entre las categorías: Salsa, vallenato, despecho, merengue y boleros.

Entrevistó Jairo a 100 personas y anotó los resultados así:

Tipo de música	Conteo	Frecuencias absolutas
Salsa		23
Vallenato		22
Despecho		20
Merengue		15
Boleros		20

Observando la tabla anterior vemos que la mayor frecuencia corresponde al tipo de música salsa. Entonces diremos que esa es la moda (Mo).

2. Las tablas que se presentan a continuación, muestran las temperaturas registradas en una ciudad de Colombia, el primer día de cada mes, observadas durante un año.

Meses	Temperaturas °C	Meses	Temperaturas °C
Enero	12	Julio	17
Febrero	13	Agosto	16
Marzo	12	Septiembre	16
Abril	12	Octubre	12
Mayo	14	Noviembre	10
Junio	15	Diciembre	11

Temperaturas °C	Conteo	Frecuencias $f_i$
10		1
11		1
12		4
13		1
14		1
15		1
16		2
17		1

La temperatura con mayor frecuencia es 12 °C, lo cual indica que 12 °C es la temperatura moda y se escribe:  $Mo = 12$ .

Definimos la moda (Mo) como el dato que más se repite en un conjunto de datos.

**Moda es el dato que más se repite o marca de mayor frecuencia.**

### Promedio o Media aritmética o Media

Hay conceptos que se aplican comúnmente sin conocerlos a fondo.

Cuántas veces se han escuchado expresiones como:

- a. ¿El promedio más alto del grupo?
- b. ¿El sueldo promedio del colombiano?
- c. ¿El promedio de vida en la actualidad?  
Y, ¿quién conoce la forma de obtener esos promedios?

La mayoría de la gente entiende lo que significan dichas expresiones pero no todos saben cómo se calculan. Así que, a continuación, se verá la forma de obtener el Promedio, Media o Media aritmética, en las situaciones de dos ciudades.

Las temperaturas en grados centígrados, tomadas en dos ciudades A y B, los días primero de cada mes de un determinado año a las 12 del día, son:

	E	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
A	12	13	12	12	14	15	17	16	16	12	10	11
B	7	7	13	14	15	18	17	18	12	13	10	8

Se desea saber cuál es la temperatura promedio en cada ciudad y cuál es el promedio más alto.

Para obtener el promedio de temperatura de cada ciudad se realiza la suma de sus temperaturas y se divide entre el número de meses del año.

$$A : \frac{12 + 13 + 12 + 12 + 14 + 15 + 17 + 16 + 16 + 12 + 10 + 11}{12} \cong 13.1 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$B : \frac{7 + 7 + 13 + 14 + 15 + 18 + 17 + 18 + 12 + 13 + 10 + 8}{12} \cong 12.66 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Las dos medidas son muy parecidas, el promedio en la ciudad A es un poco mayor: 13.1 °C. En la ciudad B el promedio es de 12.66 °C.

El dato presentado anteriormente como promedio se le llama también media aritmética o media.

Esta medida señala el centro de una distribución pero su desventaja es que puede verse afectada de manera considerable por uno o dos valores extremos de toda la muestra.

Esto sucedería por ejemplo, en una ciudad en la cual la mayoría de los meses ofrecen una temperatura similar y en tres meses de intenso verano las temperaturas son elevadas lo que hace que el promedio general suba, lo cual no refleja la realidad del clima de dicha ciudad.

**Para hallar la media aritmética o promedio se suman todos los datos y se divide por el número total de datos.**

### Mediana

Dado un conjunto numérico, es posible ordenarlo ya sea de manera ascendente, es decir, de menor a mayor o descendente, esto es de mayor a menor e identificar el elemento central. A este dato ubicado en el centro del conjunto ordenado se le llama “Mediana” (Me).

Ejemplos:

1. Dado el conjunto formado por los elementos: 4, 6, 3, 7, 3, 5, 6, identificar la mediana.

**Solución**

Lo primero que hacemos es ordenar el conjunto, ya sea ascendentemente o descendentemente.

Después identificamos el dato que está en el centro del conjunto ordenado, así:

$$\underbrace{3, 3, 4}, 5, \underbrace{6, 6, 7}$$

Observa que este conjunto tiene 7 elementos y 7 es un número impar, por lo tanto,  $Me = 5$ .

¿Qué ocurre cuando el número de datos o elementos del conjunto es par?

Por ejemplo, dado el conjunto formado por los elementos o datos: 9, 3, 6, 10, 3, 4, 3, 7, 2, 5, encontrar la mediana (Me).

**Solución**

Primero ordenamos el conjunto de mayor a menor o de menor a mayor y ubicamos el centro.

$$\underbrace{2, 3, 3, 3}, \boxed{4, 5}, \underbrace{6, 7, 9, 10}$$

Como en el centro no nos queda un solo dato sino dos valores, entonces los promediamos, es decir, los sumamos y los dividimos entre dos.

$$\begin{array}{c} 4.5 \\ \downarrow \\ \underbrace{2, 3, 3, 3}, \boxed{4, 5}, \underbrace{6, 7, 9, 10} \\ \uparrow \\ \frac{4 + 5}{2} = \frac{9}{2} = 4.5 \end{array}$$

2. Sea el conjunto de datos: 12, 17, 14, 16, 11, 13, 12, 16, 10, 12, 15, 12, calcular la Me.

Como el número de elementos del conjunto o datos es par, pues tiene doce elementos, entonces, la mediana estará determinada por el promedio de los dos valores que ocupan los lugares de en medio:

$$\begin{array}{c} \underbrace{10 \ 11 \ 12 \ 12} \quad \boxed{12 \ 13} \quad \underbrace{14 \ 15 \ 16 \ 16 \ 17} \\ \hline \frac{12 + 13}{2} = 12.5 \end{array}$$

Los datos del centro de la distribución son 12 y 13, y su promedio es 12.5, por lo que este valor representa la mediana.  $Me = 12.5$ .



**Aplicación**

Copia los próximos ejercicios en tu cuaderno. Trabaja primero individualmente, después compara con algunos compañeros y si hay diferencias, analízalas y saca una conclusión.

1. Dados los datos siguientes:  
5, 13, 5, 6, 8, 9, 9, 5, 11, 9, 9, 6, 7, 8, 9, 10, 13
  - a. Ordénalos.
  - b. Calcula la media.
  - c. Identifica la mediana.
  - d. Encuentra la moda.
  
2. Ordena los datos siguientes:  
5, 76, 6, 5, 4, 4, 8, 8, 10, 11, 9, 9 y calcula:
  - a. Media =
  - b. Mediana =
  - c. Moda =
  
3. Durante 8 días se registraron las presentes temperaturas, en grados centígrados en una ciudad:  
23, 27, 22, 24, 25, 25, 20, 23. Encuentra:
  - a. Media =
  - b. Mediana =
  - c. Moda =

### Entendemos por...

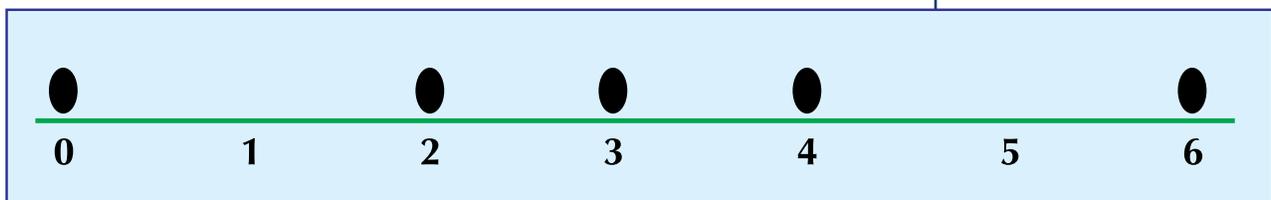
**Cálculo** al cómputo o cuenta que se hace de algo por medio de operaciones matemáticas. Por ejemplo, se calcula la media aritmética o promedio de unos valores.

### Diversión matemática

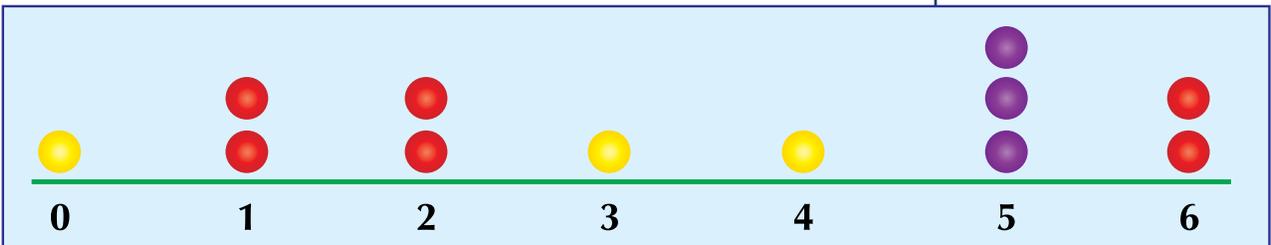
Descubre media y moda, de una manera lúdica

Observa los datos que están mostrando las huellas, sobre las rectas numéricas.

¿Cuál es la media aritmética o promedio de los datos representados en el segmento de recta siguiente?



¿Cuál es la moda de los datos representados en el segmento de recta siguiente?



### Día a día

#### La estadística en los Proyectos productivos

La estadística en los Proyectos Productivos contribuye a dar seguridad en la toma de decisiones para evaluar la mejor opción en el proyecto a desarrollar ya sea agrícola, ganadero, industrial o social. Brinda credibilidad entre los participantes del proyecto. Da seguridad sobre la sostenibilidad y ayuda a identificar la funcionalidad que va a evitar desperdicio de recursos.

Con base en un estudio estadístico se va más seguro a gestionar créditos financieros que permitan hacer realidad el Proyecto Productivo que la persona tiene en mente.

Gracias a los cálculos matemáticos, pueden organizarse, tabularse y graficarse distribuciones de datos recogidos del diario trabajo del campo, según sea el interés de quien elabora el proyecto, y así poder planear el desarrollo del mismo.

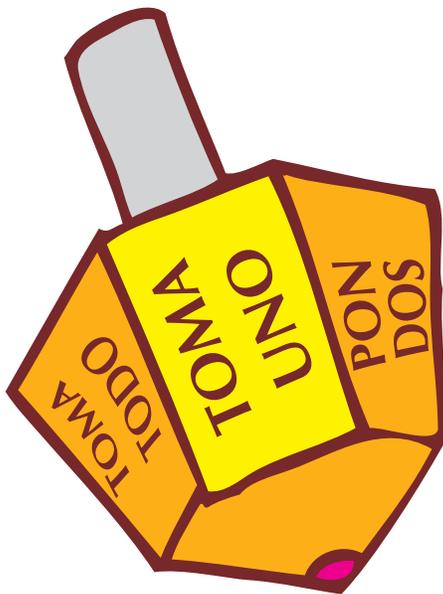
## Tema 3. Probabilidad



### Indagación El juego de la pirinola o la perinola

Es un juego bastante conocido y divierte.

Es un juego de azar porque no se sabe exactamente el resultado que va a salir.



Las caras ocultas de la perinola dicen:

- Pon uno.
- Toma dos.
- Todos ponen.

En tu cuaderno responde y después dialoga con compañeros(as).

- ¿A qué cara le apostarías?
- ¿Estás completamente seguro de que ganarás?
- Cuando sueltas una manzana, ¿ésta sube o cae?

Comparte tus opiniones con las de tus compañeros.

Forma un equipo con dos compañeros y realiza una lectura comentada del texto.



### Conceptualización

Una persona pasa frente a un puesto de billetes de la lotería, se detiene y exclama: ¡si estuviera seguro de ganarme el premio, compraría uno! Pero, ¿es seguro, imposible o probable que este fenómeno suceda?

Consideremos los hechos siguientes:

- Al lanzar un dado, ¿saldrá el 5?
- Extraer una canica roja de una caja que contiene sólo canicas rojas.
- Al lanzar una moneda caerá sello.
- En una bolsa hay tres fichas blancas y una roja. Al sacar dos fichas, por lo menos una es de color blanco.

De algunas situaciones o fenómenos como los anteriores no se puede asegurar si ocurrirán o no. Por ejemplo, lanzar un dado y obtener el 5.



Este fenómeno presenta una serie de resultados

(1, 2, 3, 4, 5, 6),

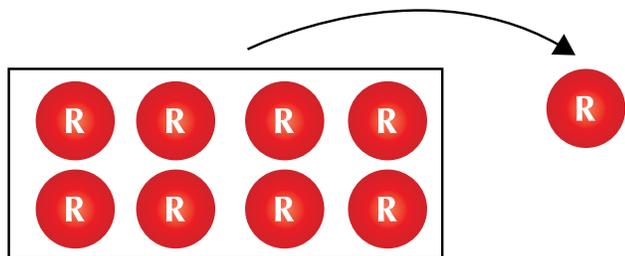
de los cuales no se puede asegurar cuál se dará; obtener el 5 es una posibilidad.

A los fenómenos o situaciones de este tipo se les llama aleatorios o de azar.

**Un fenómeno es aleatorio o de azar cuando, aun conociendo las posibilidades que pueden presentarse, no se puede asegurar cuál será el resultado final.**

En cambio, otros fenómenos tienen únicamente una respuesta.

Por ejemplo, al extraer una canica roja de una caja que contiene sólo canicas rojas, se puede predecir con seguridad cuál será el resultado.



A fenómenos como el anterior se les llama deterministas.

**Un fenómeno es determinista cuando sabemos cómo se produce y lo que ocurriría ante ciertas condiciones.**

También, lanzar una moneda para ver si cae sello es un fenómeno aleatorio, y sacar por lo menos una ficha blanca en la última situación enunciada es determinista.

Así mismo, se puede afirmar que el fenómeno presentado al inicio de esta lección (comprar un billete para ganar el premio de la lotería) es aleatorio o de azar.

**Los fenómenos aleatorios o de azar son estudiados por una rama de las matemáticas: la probabilidad. Mediante ella se determina la posibilidad de obtener un resultado esperado.**

### Espacio muestral (EM)



Si observamos la pirinola, del juego propuesto en la indagación, encontramos las leyendas siguientes:

- Toma uno
- Toma dos
- Toma todo

- Pon uno
- Pon dos
- Todos ponen

Este conjunto de leyendas son los resultados posibles y alguno de ellos va a salir en cada tiro que se haga girar. A este conjunto se le llama *Espacio muestral*.

En los fenómenos aleatorios o de azar no se puede predecir con exactitud lo que sucederá.

Otro caso es el lanzamiento de un dado existen 6 posibles resultados y no se puede predecir con certeza cuál de ellos ocurrirá.

También, al realizar el lanzamiento de una moneda, existe la duda respecto a los resultados: cara o sello.

Si dos equipos se enfrentan en un juego de baloncesto, ¿cuál ganará?, sólo hay tres posibles resultados: la derrota, el empate o la victoria.

Cada uno de los posibles resultados de los experimentos anteriores se llama evento.

**A la colección de todos los resultados posibles de un experimento se le llama Espacio Muestral (EM) o espacio de eventos.**

En la tabla siguiente se muestran los fenómenos aleatorios con su correspondiente espacio muestral.

Fenómeno	Espacio muestral
Lanzamiento de un dado	1, 2, 3, 4, 5, 6
Lanzamiento de una moneda	Cara, sello
Resultado de un partido de fútbol	Triunfo, derrota, empate

Cuando un evento sólo tiene un posible resultado se llama evento simple o elemental.

Ejemplo: al tirar una moneda al aire, hay dos eventos simples: caer cara (c) o caer sello (s).

El espacio muestral se denota: EM.

Pero cuando un evento implica posibilidades diferentes, se denomina evento múltiple.

Ejemplo: si al lanzar un dado, el número esperado fuera par, el evento lo formarían 2,4y 6.

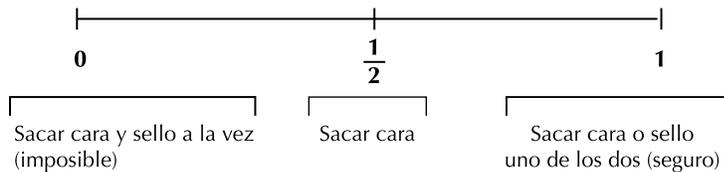
Otros eventos importantes son el evento imposible y el evento seguro.

Evento imposible es aquel resultado de un experimento del cual se sabe con certeza que no podrá ocurrir.

Ejemplo: que al arrojar una vez un dado, con caras numeradas del uno al seis, aparezca el número siete.

Evento seguro es aquel en el que todo elemento del espacio muestral satisface las necesidades para las que se hizo tal experimento.

Se ha convenido asignar el valor numérico 0 (cero) a la ocurrencia de un evento imposible y asignar el valor 1 a la ocurrencia de un evento seguro, de tal manera que la ocurrencia de un evento aleatorio tomará valores entre 0 y 1, así, en el caso de lanzar una moneda, como hay dos eventos posibles (c, s), a la ocurrencia de cada uno de ellos se asigna el valor  $\frac{1}{2}$ .



Por lo tanto, la probabilidad de un evento se mide entre 0 y 1.

Ejemplos:

- ¿Cuáles las probabilidades de resultado al lanzar al aire un dado?  
Puesto que un dado es un cubo, todas las caras tienen la misma oportunidad de quedar hacia Arriba, al lanzar al aire el dado, todos los posibles resultados, o sea el Espacio muestral (EM), son los siguientes:

EM: 1, 2, 3, 4, 5, 6

- ¿Cuál es el espacio muestral (EM) al lanzar una moneda al aire?  
Los posibles resultados de lanzar la moneda son:

EM: cara, sello

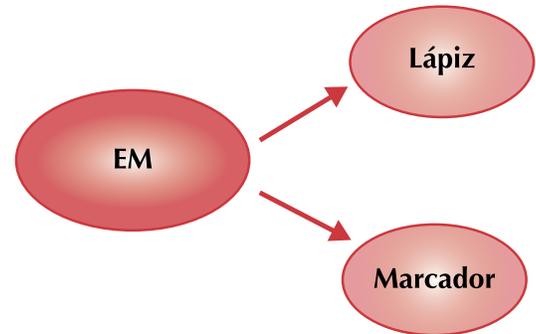
### Diagrama de árbol

La probabilidad se puede representar gráficamente por medio de diagramas de árbol, los cuales reciben ese nombre debido a su apariencia y a su aplicación en probabilidad.

Para ilustrar lo anterior, considérense los siguientes ejemplos:

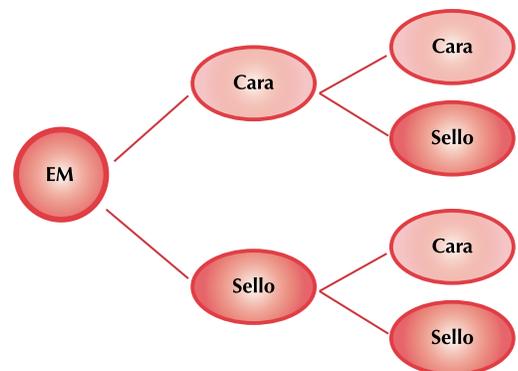
- Un niño tiene en una caja, un lápiz y un marcador, ¿cuál es la probabilidad de que, sin ver, saque de la caja el lápiz o el marcador?

De acuerdo con la probabilidad clásica, ésta es de  $\frac{1}{2}$ , situación que puede representarse gráficamente en un diagrama de árbol, como se muestra a continuación:



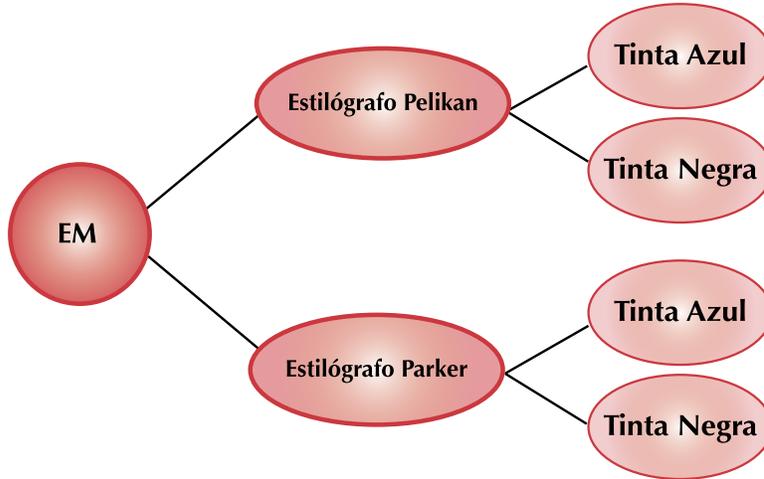
- ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos caras, al lanzar una moneda al aire dos veces consecutivas?

Esto se puede representar en un diagrama de árbol de la probabilidad, considerando que el primer lanzamiento tendría dos probables resultados diferentes y que, al lanzar por segunda vez la moneda, cada uno de los dos primeros resultados se combinaría con los dos resultados del segundo lanzamiento.



Se puede observar que existen cuatro diferentes resultados, o sea, que la probabilidad de obtener cara y sello es de  $\frac{1}{4}$ .

- c. José adquirió dos estilógrafos Pelikan (uno de tinta azul y el otro de tinta negra) y 2 estilógrafos Parker (uno de tinta azul y el otro de tinta negra) para utilizarlos en su trabajo, como no tiene ninguna restricción para utilizar cualquier color de tinta, ¿qué probabilidad hay de que utilice un estilógrafo Pelikan de tinta negra?



Esta pregunta se puede contestar si se elabora un diagrama de árbol.

Se aprecia que la probabilidad de utilizar un estilógrafo Pelikan de tinta negra es de  $\frac{1}{4}$ .

Por lo tanto, puede afirmarse que por medio de los diagramas de árbol se logra calcular la probabilidad de un evento, dado el espacio muestral.

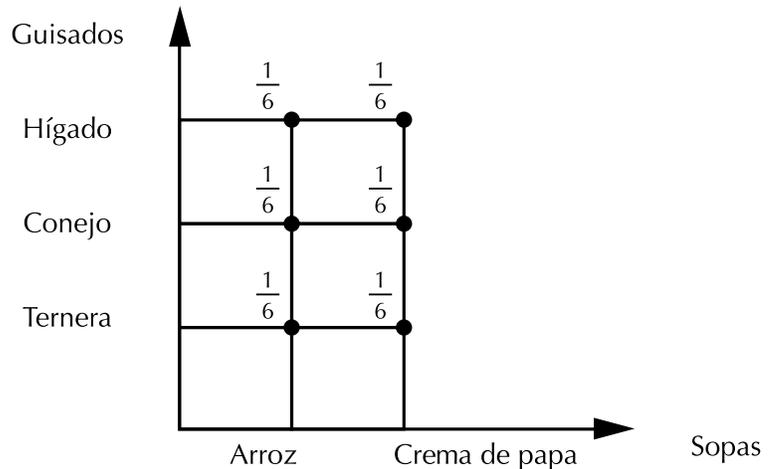
### Diagrama cartesiano

Ya hemos venido manejando el plano cartesiano y podemos aplicarlo ahora.

Véanse los siguientes ejemplos:

- a. Pedro llega a un restaurante y encuentra que del menú del día quedan solamente dos sopas: arroz y crema de papa; y tres guisados: ternera, conejo e hígado. ¿Cuál es la probabilidad de que Pedro pida sopa de arroz y conejo dentro de su menú).

Para llevar a cabo esta representación gráfica se trazan dos líneas: una vertical y otra horizontal, formando ambas un ángulo recto. En cada una de ellas se marcan intervalos similares a los que se hacen en una recta numérica. Se representan las sopas en la línea horizontal y los guisados en la vertical; haciendo que coincida cada sopa con un guisado hasta que queden incluidos todos, como se muestra en la siguiente figura.

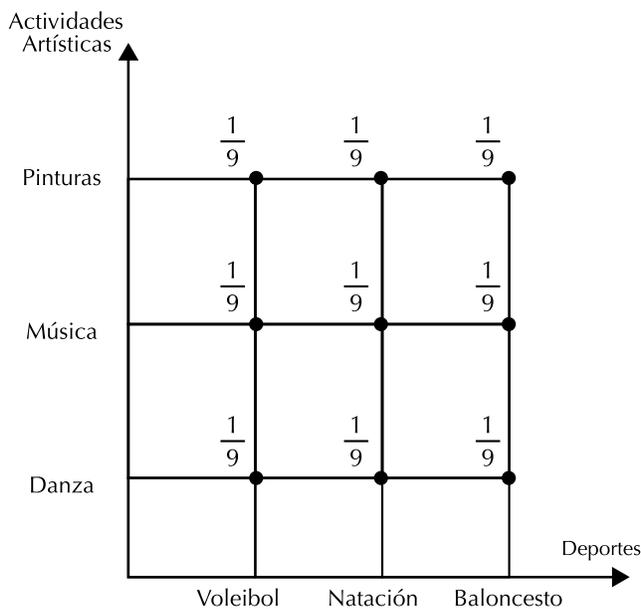


En este diagrama cartesiano se puede apreciar que la probabilidad de que Pedro pida arroz y conejo dentro de su menú es  $\frac{1}{6}$ , puesto que hay 6 combinaciones posibles.



**Aplicación**

- b. María desea asistir a un curso de vacaciones. La escuela en la que pide información ofrece 3 deportes: voleibol, natación y baloncesto; así como 3 actividades artísticas: danza, pintura y música, ¿cuál es la probabilidad de que María escoja participar en voleibol y pintura?



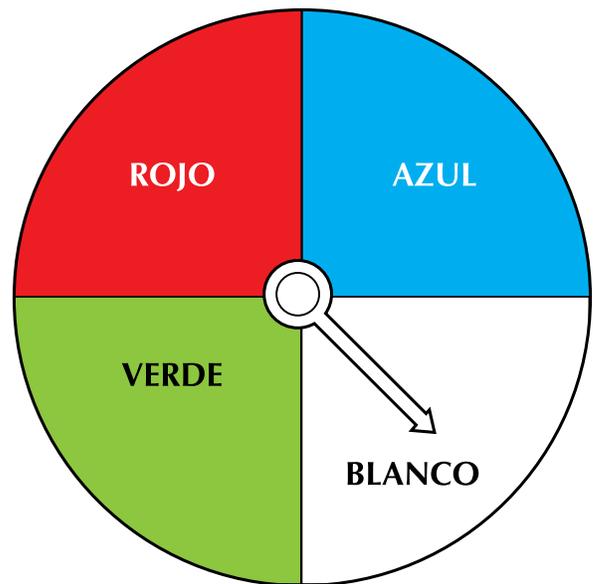
El diagrama cartesiano permite calcular esta probabilidad. Al observar el diagrama cartesiano se encuentra que la probabilidad de que María seleccione voleibol y pintura es de  $\frac{1}{9}$ , ya que el número de combinaciones posibles es 9.

Es conveniente señalar que un fenómeno de azar o aleatorio se podrá representar en un diagrama cartesiano, solamente si existen dos variables o características, ya que se cuenta sólo con dos ejes (horizontal y vertical). Si hay más de dos variables, deberá emplearse otra forma de representación, como el diagrama de árbol.

Copia los ejercicios en tu cuaderno, resuélvelos y compara.

- Escribe en el paréntesis una (O) si el fenómeno es determinista o una (A) si es aleatorio.
  - Obtener un número par al lanzar un dado ( )
  - Sacar un listón rojo de una caja que contiene listones verdes y negros .....( )
- Cuando compras una prenda de vestir, seguramente pides que te muestren los diferentes modelos, tamaños y colores, y entre todos ellos eliges el que más te agrada. Es decir, para hacer una elección es necesario conocer todas las posibilidades.

Observa con cuidado el siguiente dibujo y contesta individualmente lo que se pide. Si se gira la aguja, entonces:



- ¿Cuál es el espacio muestral del experimento?
- ¿Será posible que la aguja señale el color rojo?
- ¿Será posible que la aguja señale el color negro?
- ¿Cuál será un evento seguro?

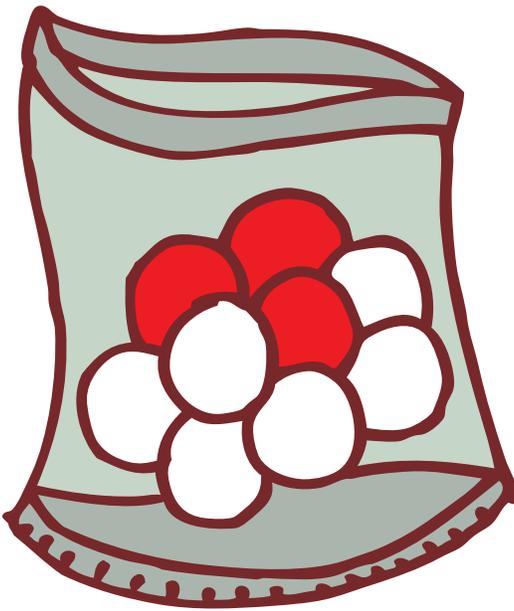


3. La probabilidad de sacar un rey en una baraja española, de 40 cartas.

- Número de elementos del espacio muestral:  
n (EM) = \_\_\_\_\_
- Número de reyes de la baraja: n (A) = \_\_\_\_\_
- Probabilidad de sacar un rey: p (A) = \_\_\_\_\_

4. La probabilidad de sacar una pelota roja de una bolsa que contiene 3 pelotas rojas y 5 blancas.

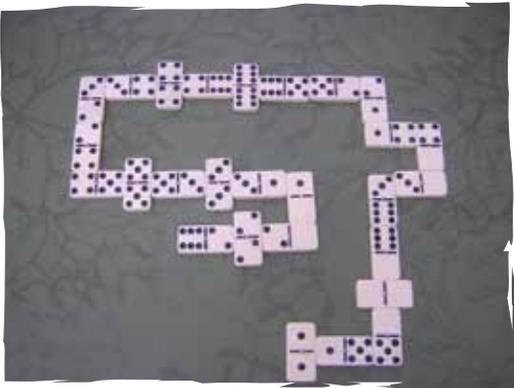
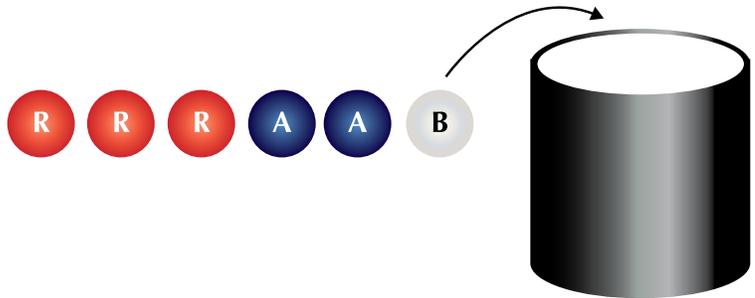
- Número de elementos del espacio muestral:  
n (EM) = \_\_\_\_\_
- Número de pelotas rojas: n (R) = \_\_\_\_\_
- Probabilidad de sacar una pelota roja: p (R) = \_\_\_\_\_



5. La probabilidad de sacar una ficha de dominó que tenga un cinco.

$$n(\text{EM}) = \quad n(\text{C}) = \quad p(\text{C}) =$$

6. En una bolsa negra o en un tarro donde puedas meter la mano, coloca 3 fichas rojas, 2 azules y 1 blanca.



Prepara en tu cuaderno una tabla como la siguiente:

Fichas de colores	Número de veces	
		
		
		
	<b>Total</b>	

Al sacar una ficha, sin mirar:

- ¿A cuál color le apostarías?
- ¿Cuál color tiene más posibilidades de salir?
- ¿Por qué?

Anota los colores escogidos.

- Ahora, saca una ficha del tarro y anota una rayita en la fila del color correspondiente. Devuelve la ficha al tarro y saca otra; anota la rayita y continúa hasta completar por lo menos 50 sacadas.
  - ¿Cuál fue el color que registró mayor frecuencia?
  - ¿Corresponde ese color al que le apostaste?
  - ¿Qué pasó con el color blanco?
  - Calcula la probabilidad de sacar una ficha roja, la de sacar una ficha azul y la de sacar una blanca.

Comenta con tus compañeros la explicación que le das a los resultados.

La experiencia surge de un hecho real y objetivo, se asimila para tomar los elementos necesarios en experiencias futuras. Estos hechos arrojan información que nos permite comprender el fenómeno o suceso, sujeto a estudio.

- Efectúa el experimento de lanzar una moneda 12 veces al aire y anota en la tabla siguiente una cruz las veces que cae cara:

Lanzamiento	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Cara												

- ¿Cuántas veces se ha efectuado el experimento?
- ¿Cuántas veces se ha efectuado el suceso?
- ¿Cuál es la probabilidad empírica o frecuencial del experimento?

Comenta los resultados y las respuestas de tu experimento a otro equipo y encuentren explicaciones para los resultados diferentes.

- En una caja se tienen 17 fichas, de las cuales seis son de color rojo; siete, blancas y cuatro, verdes; al extraer una ficha, los resultados obtenidos fueron los siguientes:

Extracciones	Fichas (veces que sale cada color)
25	13 rojas
50	17 blancas
100	25 verdes

- a. ¿Cuál es la probabilidad empírica o frecuencial de obtener una ficha roja en 25 extracciones?
- b. ¿Cuál es la probabilidad empírica o frecuencial de obtener una ficha blanca en 50 extracciones?
- c. ¿Cuál es la probabilidad empírica o frecuencial de obtener una ficha verde en 100 extracciones?
- d. ¿En cuál de los tres casos es más parecida la probabilidad frecuencial a la probabilidad teórica?

10. Analiza y responde:

- a. ¿Cuál es la probabilidad de que, al lanzar un dado al aire, se obtenga un número primo?
- b. ¿Cuál es la probabilidad de ganar un televisor en una rifa si hay 90 números y se compran 5?

11. Efectúa una serie de 10 lanzamientos de un dado y anota el total de frecuencias obtenido, comprueba que la suma de las frecuencias sea de 10. Una vez realizado el experimento, contesta las preguntas que se indican después de la tabla.

										Frecuencia total

- a. ¿Cuántos lanzamientos se hicieron en total?
- b. ¿Cuál es el espacio muestral en el lanzamiento de un dado?
- c. ¿Cuál es la probabilidad clásica de obtener un 3 al lanzar el dado?
- d. ¿Cuál fue la probabilidad frecuencial de obtener 3 al lanzarlo 10 veces, en el experimento anterior?

Verifica tus respuestas con las de otros dos equipos; si tienes dudas, consulta con tu profesor.

Contesta este ejercicio en forma individual.

12. En 50 lanzamientos de un dado, 22 veces se obtuvieron pares. ¿Cuál es la probabilidad clásica y cuál la probabilidad frecuencial del evento?

Cuando alguien logra resolver algún problema por esfuerzo propio, es decir, sin la ayuda de otro, siente una emoción y una satisfacción muy especiales. Ha llegado el momento en que tú también sientas esa satisfacción propia; para ello, basta que resuelvas algunos problemas en los que aplicarás tus conocimientos.



13. Con un compañero, comenta las respuestas a las siguientes preguntas:

- ¿Qué es un fenómeno aleatorio o de azar?
- ¿Qué es un espacio muestral?
- ¿Cómo se determina la probabilidad frecuencial?

14. En cada uno de los siguientes experimentos, indica cuál es el espacio muestral.

- Se rifa un reloj entre 25 personas.
- Se le pregunta a una persona cuál es su signo zodiacal.
- Se lanzan dos monedas: una de \$100 y otra de \$200, para ver si cae cara o sello.

15. ¿Qué probabilidad existe de que una persona que se encuentra con los ojos vendados saque una canica negra de una caja que contiene 11 canicas blancas, 3 rojas y 6 negras?

16. Al lanzar un dado, ¿cuál es la probabilidad de sacar un número mayor que 2?

17. En un examen de matemáticas, una pregunta tiene 4 posibles respuestas. ¿Cuál es la probabilidad de que se acierte casualmente?

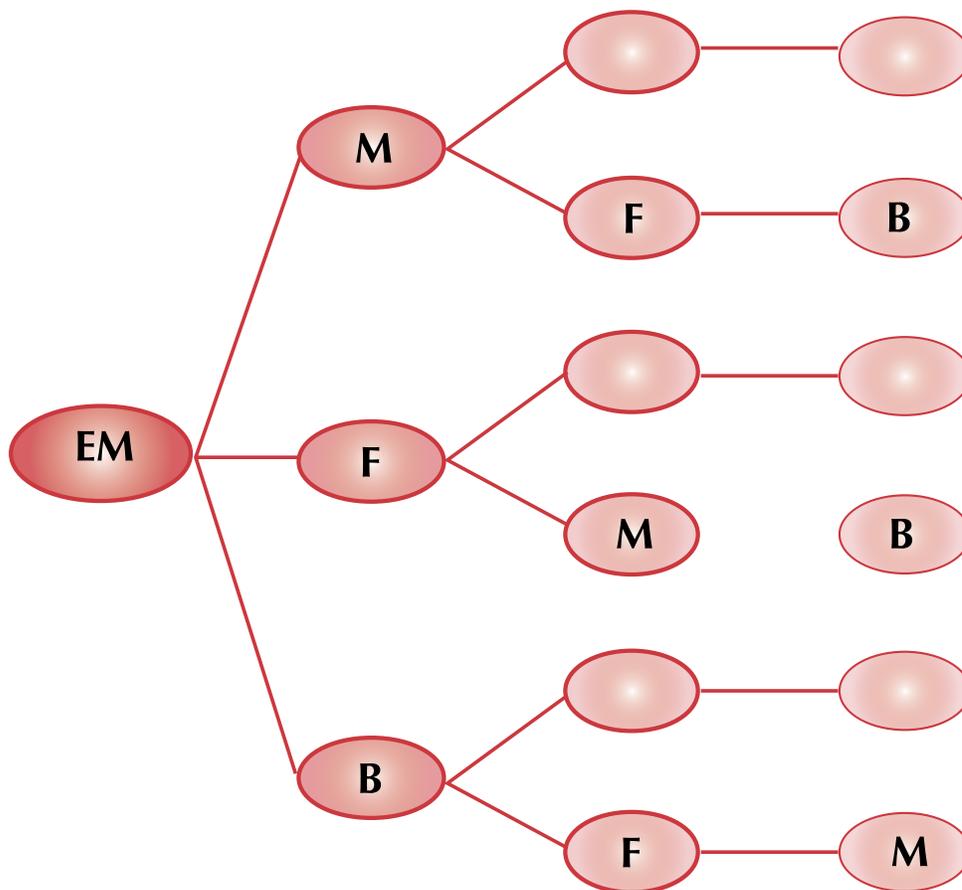
18. En un bus de pasajeros viajan 8 personas; de ellas 3 son mujeres. ¿Cuál es la probabilidad de que en la primera parada baje una persona del sexo masculino?

19. En 50 lanzamientos de un dado, 8 veces se obtuvo el número 6.

- ¿Cuál es el número de aciertos?
- ¿Cuál fue el número de ensayos?

20. Si un estudiante tiene en su mochila un libro de Matemáticas, uno de Biología y uno de Física, ¿cuál es la probabilidad de que, sin ver, saque primero el de Biología, luego el de Física y finalmente el de Matemáticas?





21. Dentro de una caja se tienen 3 canicas: una verde, una roja y una azul, ¿cuál es la probabilidad de que al primer intento se extraiga de la caja la canica roja?  
Justifica tu respuesta elaborando en tu cuaderno un diagrama de árbol que represente la situación dada.
22. Individualmente, elabora el diagrama de árbol que representa la situación que se describe en seguida y contesta lo que se pide.  
Luisa tiene 3 blusas: verde, azul y roja. Además, dos pantalones: negro y blanco. ¿Cuál es la probabilidad de que al combinarlos se vista con blusa azul y pantalón blanco?  
Compara tu diagrama y tu respuesta con los de la clave. En caso de error, corrige.
23. Mario tiene en una caja tres billetes, cuyos valores son de \$2,000, \$5,000 y \$10,000, respectivamente.  
¿Cuál es la probabilidad de que, al primer intento, extraiga el billete de \$ 5,000?

24. El señor Rosales acude a una feria ganadera con el propósito de comprar un caballo. El vendedor le informa que tiene alazanes, rosillos y tordillos, de dos y de tres años de edad. ¿Qué probabilidad existe de que el señor Rosales escoja un alazán de tres años?  
Elabora un diagrama cartesiano para calcular la probabilidad requerida.
25. La señorita Vázquez va a realizar un viaje. Al solicitar información sobre los medios de transporte y los días en los que puede viajar, se enteró de que puede hacerlo en bus, en automóvil o a caballo, solamente jueves, viernes, sábado o domingo de cada semana. ¿Cuál es la probabilidad de que la señorita Vázquez decida viajar a caballo y en día sábado?  
Compara tu diagrama y tu respuesta con los de la clase. Si hay algún error, corrígelo.

### Entendemos por...

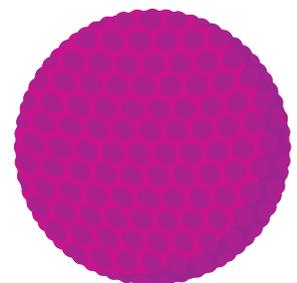
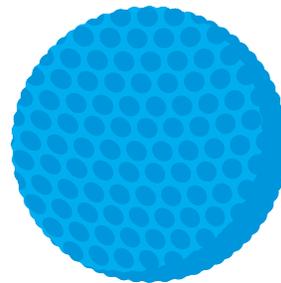
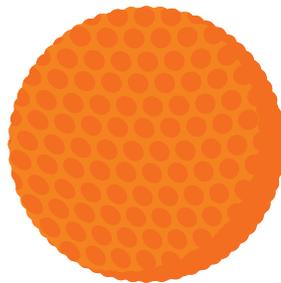
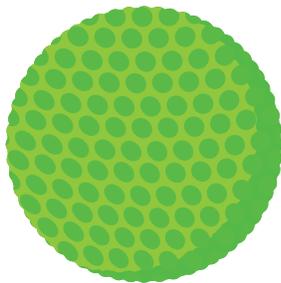
**Posibilidad** la circunstancia u ocasión de que una cosa ocurra o suceda. Por ejemplo cuando decimos la expresión “que venga es solo una posibilidad”, no está asegurado que venga.

**Alternativa** una de al menos dos cosas (objetos abstractos o reales) o acciones que pueden ser elegidas. Desde un punto de vista específico, los objetivos y las alternativas son siempre equivalentes.

### Diversión matemática

Jugando con balotas de colores

¿Cuántos tríos diferentes puedes formar con 4 balotas de colores diferentes?



### Día a día

Juego con monedas

Vamos a jugar en pareja, cada dos estudiantes juegan a lanzar dos monedas, y registran los resultados en su respectivo cuaderno.

Observen cuántas veces las monedas cayeron del mismo lado.

Traten de adivinar cómo caerán las monedas y quien de los dos acierta más.





## Este capítulo fue clave porque

- Me permitió aclarar las ideas sobre población, muestra y variable.
- Adquirí más orden en mi trabajo matemático al organizar información en tablas.
- Adquirí precisión en la construcción de gráficas en el plano cartesiano.

- Sé calcular la mediana y la media aritmética.
- Identifico las medidas de centralización.
- Aprendí a buscar espacio muestrales.

## Conectémonos con Biología Humana



### El órgano de órganos: el cerebro

Probablemente la más compleja, ordenada y fascinante estructura de materia conocida en el universo.

En sólo 1,400 gramos de materia (menos de 1 kilo y medio) albergamos entre **10,000 millones** y **100,000 millones** de neuronas tantas como el número de estrellas de nuestra galaxia.

Cada neurona establece entre 5,000 y 50,000 conexiones con sus células vecinas. Lo cual equivale a construir una red neuronal intercomunicada por **100,000,000,000,000 conexiones**.

- La corteza cerebral extendida, cubriría entre 1,800 y 2,300 centímetros cuadrados.
- Tres cuartas partes del cerebro son agua.
- Un mensaje enviado por el cerebro a cualquier parte de nuestro organismo puede alcanzar una velocidad de 360 kilómetros por hora. Es decir, que un impulso nervioso tarda **2 décimas de segundo en llegar de la cabeza a los pies**.
- El cerebro contiene 30 gramos de colesterol.
- El cerebro ofrece anfractuosidades y circunvoluciones y parece estar tan plegado y apiñado **para ocupar el mínimo espacio posible**. Con todo, el cerebro es tan grande que no nacemos con él totalmente desarrollado. De lo contrario, el bipedismo y el estrechamiento del canal del parto no permitiría que el cerebro cupiese por él.



### El cerebro no puede sentir dolor porque no dispone de nervios capaces de registrarlo.

Los neurocirujanos pueden sondear el cerebro aunque la persona esté consciente. Irónicamente es el encargado de hacernos sentir el dolor del resto del cuerpo.

- El 20% de las necesidades de oxígeno y de calorías de nuestro cuerpo provienen del cerebro, pese al hecho de que el cerebro únicamente supone (de media) un 2% de la masa corporal.
- Un cerebro adulto **consume en un día entre 250 y 300 calorías**, lo que supone una potencia de cerca de 15 vatios para un cerebro medio.
- Tenemos **150,000 kilómetros de nervios**. El más grande es la médula espinal, que tiene 45 cm y 3,8 cm de ancho. El más largo, sin embargo, es el tibial, que tiene una longitud de 50 centímetros.

El máximo voltaje del impulso nervioso es de 100 mili voltios. El máximo número de impulsos: 300 por segundo.

<http://www.xatakaciencia.com/biologia/el-cerebro-humano-en-cifra>

## Repasemos lo visto



Una población es cualquier colección de datos, ya sean mediciones o conteos, sobre una característica particular común con respecto a los elementos de un grupo específico sujeto a un estudio determinado.

Una muestra, en cambio, es la parte de una población que se selecciona de acuerdo con una regla o un plan de trabajo que responda al propósito de la investigación.

Los datos pueden ser de dos tipos: **cuantitativos** y **cualitativos**. Los primeros hacen referencia a una cualidad, lo que permite clasificarlos, y los segundos son de carácter numérico, puesto que provienen de mediciones.

Es importante al determinar los límites de los intervalos asegurarse de que todo dato va a pertenecer a un único intervalo y que ningún dato vaya a quedar fuera de los intervalos.

Frecuencia absoluta ( $f$ ) de un dato estadístico es el número de veces que aparece en una distribución de datos.

Un fenómeno es determinista cuando sabemos cómo se produce y lo que ocurriría ante ciertas condiciones.

Los fenómenos aleatorios o de azar son estudiados por una rama de las matemáticas: Probabilidad.

Mediante ella se determina la posibilidad de obtener un resultado esperado.

A la colección de todos los resultados posibles de un experimento se le llama espacio.

# Mundo rural

## La pesca colombiana

Colombia desarrolla la pesca industrial en sus océanos Atlántico y Pacífico; la pesca artesanal en ambas costas y en aguas continentales (ríos, lagos, lagunas, embalses y canales). Desde los años 80 se ha desarrollado la acuicultura en aguas dulces y marinas, con un notable grado de crecimiento. Por su parte, la pesca deportiva es una actividad de reducido impacto económico que se practica en aguas marinas y continentales.

La pesca marítima colombiana se caracteriza porque posee una amplia variedad de recursos pero limitado volumen por cada una de ellos; sin embargo, aquellos en aprovechamiento son de alto valor comercial y apetecidos en el mercado internacional.

Sus productos se destinan a la exportación y en menor proporción al consumo interno.

Las principales especies objetivo tanto del océano Pacífico como del Atlántico son el atún, camarón de aguas someras y aguas profundas, pesca blanca (pargos, meros y chernas), pequeños pelágicos (carduma y plumuda), langosta y caracol; recientemente se han incrementado las capturas de otras especies oceánicas como dorado y calamar gigante.

El atún se captura básicamente en los límites de la Zona Económica Exclusiva del Océano Pacífico Oriental - OPO, específicamente los atunes aleta amarilla y barrilete.

Si bien el camarón de aguas someras se encuentra sobre-explotado desde los años 80, continúa siendo un recurso representativo; el 30% de sus capturas en el Pacífico y el 95% en el Atlántico son de la flota industrial. Específicamente en el Pacífico, el camarón de aguas profundas se aprovecha de manera sustentable así como la plumuda que se emplea en la producción de harina y aceite de pescado.

La pesca blanca se refiere a recursos de sistemas rocosos (pargos, meros, chernas), tiburones (que ya muestran signos de sobre-explotación), jurel, pez espada y marlin, entre otros. En su mayoría se conserva como pescado entero y filete fresco para exportación; los filetes y el entero congelado se destinan al mercado nacional.

[http://www.fao.org/fishery/countrysector/FI-CP\\_CO/es](http://www.fao.org/fishery/countrysector/FI-CP_CO/es)



## Dato curioso



### Curiosidades de Colombia

**Colombia es un país rico y diverso. Lleno de sorpresas. Asómbtrate con algunas de las maravillas de nuestro país.**



- Segundo país en biodiversidad y primero en biodiversidad por metro cuadrado.
- El Chocó y el Macizo Colombiano tienen el mayor grado de endemismo en el mundo: 18,300 especies de plantas.
- Tercer país del mundo en recursos hídricos: 1,200 ríos -258 son grandes ríos-, 1,600 lagos, 4,500 micro cuencas y 1,900 ciénagas.
- El arrecife de San Andrés es el tercero en el mundo.
- Tenemos 10% de las especies mundiales de anfibios, 733.
- Contamos 1,865 especies de aves.
- 155 colibríes nos hacen el país número uno en esta especie en el mundo.
- Somos el cuarto país en especies de mamíferos, 456 especies.
- Nuestras especies de vertebrados nos hacen el primer país mundial, con 2,890 especies, que corresponden a 10% de vertebrados del mundo.
- Ocupamos el primer lugar en mariposas en el mundo con 3,000 familias y 14,000 especies.
- Contamos con la mayor reserva marina de la biosfera en el planeta.
- Los monópteros (abejas, avispas, hormigas) suman 4,800 especies a nuestra fauna.
- Somos el tercer país en especies de reptiles.
- Contamos con 939 especies de musgo.
- Somos siete veces más pequeños que Brasil y tenemos casi el mismo número de plantas 55 mil, que representan 20% de las plantas del mundo.
- En Colombia un árbol crece tres veces más rápido que en Chile y nueve veces más rápido que en Canadá, lo que nos convierte en una riqueza forestal potencial.
- Somos el segundo exportador mundial y contamos con la mayor diversidad de especies de flores en el mundo, más de 50 mil, de las cuales 3,500 son orquídeas y 233 orquídeas nativas; somos el primer productor de claveles. y el segundo de rosas.
- Cuarto productor de aceite de palma en el mundo y número uno en variedad de palmas.
- Tercer productor mundial de banano.
- Cuarto productor de carbón.
- Nuestro café es reconocido en cualquier país, somos el tercer productor mundial, contamos con el mayor centro de investigación del café en el mundo, y con la planta de café liofilizado más grande de América y la segunda en el mundo.
- Somos el mayor productor de esmeraldas del mundo, con 60%, y tenemos la mina más grande del mundo en Boyacá.
- Segundo exportador de productos agrícolas a Estados Unidos.
- Somos el primer productor de guadua y el segundo en variedades de bambú.
- Tenemos 37 billones de barriles de reserva potencial de petróleo.
- Cartagena es Patrimonio Histórico de la humanidad.
- Nuestro Museo del Oro, el más importante del mundo, es un lugar preferido por los turistas.

Tomado de: <http://www.colombiaya.com/seccion-colombia/curiosidades.htm>

## ¿En qué vamos?



### Coevaluación “Reflexiono y trabajo con mis compañeros”

En tu cuaderno resuelve los ejercicios siguientes:

- En un torneo estudiantil de baloncesto, los equipos tienen nombre de animales. El número de puntos anotados por cada equipo fue el siguiente: Liebres 30, Invencibles 40, Poderosos 20, Águilas 45, Caminantes 15.

Contesta las siguientes preguntas de acuerdo con la gráfica:

- ¿Cuál fue el equipo campeón?
  - ¿Qué equipo anotó menos puntos?
  - ¿Cuál fue el equipo subcampeón?
  - ¿Cuántos puntos fueron anotados en total en el torneo?
  - Si se realizara otro torneo con los mismos equipos, ¿qué equipo tendría la menor probabilidad de ganar? ¿Por qué?
  - Elabora un diagrama de barras.
- Construye una gráfica circular de la siguiente tabla de datos obtenidos por una encuesta sobre preferencias deportivas:

Deporte	Núm. de alumnos
Baloncesto	10
Voleibol	6
Fútbol	9
Béisbol	5
<b>Total</b>	<b>30</b>

- El diario El Tiempo y la emisora RCN acostumbran hacer encuestas de opinión. A la pregunta: ¿Aceptaría usted ser un donante de ojos?, el 62.5% de los encuestados contestaron sí; el 31.25% contestaron no. El resto no contestan o dicen no saber.

- Representa en un diagrama circular la anterior información.
  - Si los entrevistados fueron 2,400 personas, ¿cuántas contestaron sí; cuántas, no; cuántas no respondieron o dijeron no saber?
- Los siguientes datos corresponden a la altura, en pies, de 50 árboles de una finca. Elabora un histograma y un polígono de frecuencias.

Altura árboles finca “La María” (pies)				
Intervalo	Número de árboles	Límite real inferior	Límite real superior	Puntos medios
7-12	7			
13-18	13			
19-24	15			
25-30	9			
31-36	6			

- Sobre una cubeta, cuya capacidad es de 12 L, cae el chorro de agua de una llave. Completa la siguiente tabla, considerando que cada 12 segundos cae un litro de agua; calcula:

Número de litros	1					6			
Segundos	12					72			
Constante de proporcionalidad									

- ¿En cuántos segundos se llenará la cubeta?
- ¿Cuántos litros han caído, transcurridos 108 segundos?
- ¿Cómo es la relación que da entre el número de litros y el tiempo?
- ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?
- Elabora una tabla mostrando la proporcionalidad.
- Elabora la gráfica correspondiente en tu cuaderno.

## Le cuento a mi profesor

Conversa con tu profesor sobre cuánto aprendiste en esta unidad.

Qué sé hacer	Superior	Alto	Básico	Bajo
Hago inferencias a partir de gráficas estadísticas.	Dada una gráfica, soy capaz de obtener información y conclusiones.	Generalmente obtengo información y conclusiones de gráficas.	Obtengo información y conclusiones de gráficas, con alguna dificultad.	Generalmente no obtengo información y conclusiones de gráficas.
Resuelvo problemas que dan lugar a cálculo de promedio.	Tengo precisión al resolver problemas que dan lugar a cálculo de promedio.	Resuelvo problemas que dan lugar a cálculo de promedio.	Resuelvo problemas que dan lugar a cálculo de promedio, con dificultad en algunos.	No resuelvo bien problemas que dan lugar a cálculo de promedio.
Calculo la probabilidad de ocurrencia de un evento.	Calculo la probabilidad de la ocurrencia de un evento, con precisión.	Calculo la probabilidad de ocurrencia de un evento, con alguna precisión.	A veces calculo la probabilidad de ocurrencia de un evento.	No calculo la probabilidad de ocurrencia de un evento.

## Participo y aprendo

Lee el enunciado y señala con una x la categoría correspondiente, según lo que has aprendido.

Participo y aprendo	Siempre	Casi siempre	A veces	Nunca	¿Qué debo hacer para mejorar?
Llego puntualmente a clase.					
Participo activamente en la clase.					
Respeto a mis compañeros cuando intervienen en clase.					
Cumplo con mis deberes escolares.					
Trato con respeto a las personas con quienes me comunico.					
Respeto la opinión de los demás.					
Le explico a algún compañero aquello que yo sé y que él no entiende.					
Repaso mis apuntes en casa.					
Comparto información con mis compañeros.					
Reconozco la ayuda que me brinda mi profesor(a).					

## Unidad 1

1. 6
2. 6
3. 6 arreglos y 18 figuras
4. ML = 1050
5. ----
6. MMXI
- 7.

Millones						Unidades					
Millares de Millón			Unidades de Millón			Millares			Unidades		
C	D	U	C	D	U	C	D	U	C	D	U
					9	7	3	8	8	2	5

8. ----
9. 0, 7, 8, 15, 27, 32, 34, 49, 50, 84.

10.

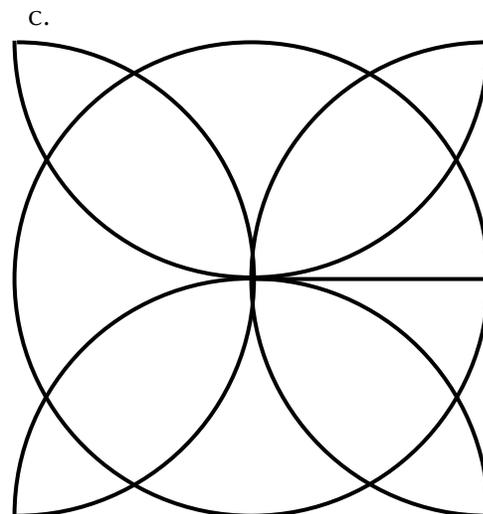
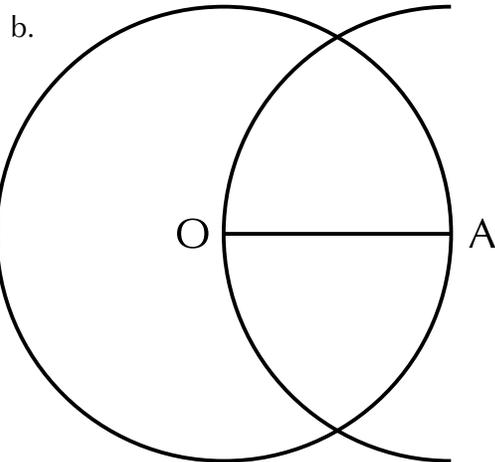
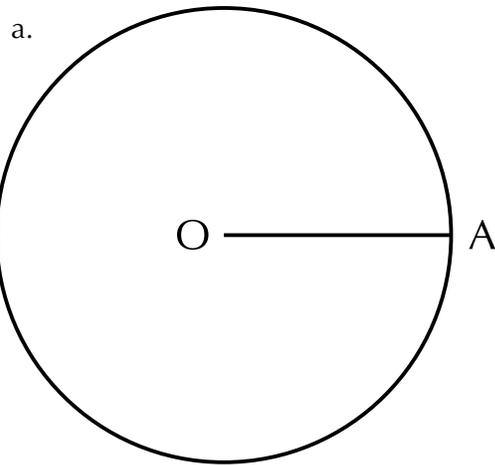
<b>4</b>	<b>3</b>	<b>8</b>
<b>9</b>	<b>5</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>7</b>	<b>6</b>

11.
  - a. Vestido.
  - b. Alimentación.
  - c. Arriendo.
  - d. Transporte.

12.
  - a. =
  - b. <
  - c. =
  - d. =
  - e. >
  - f. ≠
  - g. <

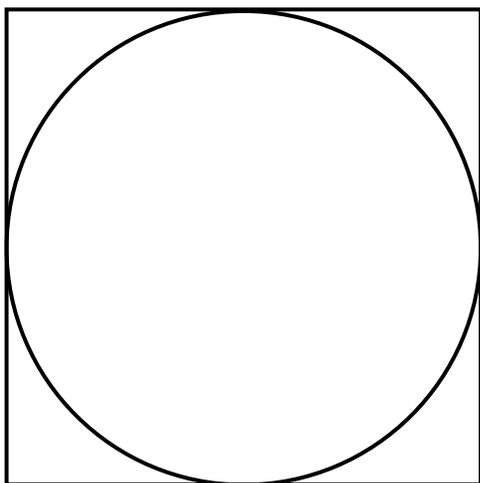
## Unidad 2

1.

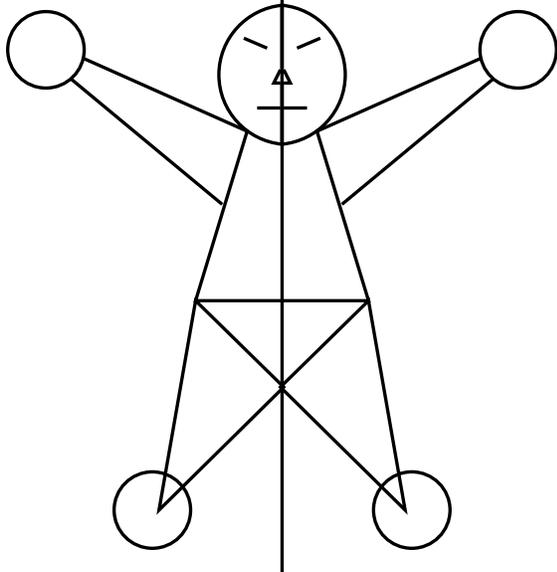


## Unidad 3

2.



3.



4.

- b.  $P = 80 \text{ cm}$
- c.  $A = 375 \text{ cm}^2$

1.

- a. Medios: 5 y 6  
Extremos: 2 y 15
- b. Medios: 12 y 21  
Extremos: 42 y 6
- c. Medios: 11 y 28  
Extremos: 7 y 44
- d. Medios:  $n$  y  $x$   
Extremos:  $m$  y  $y$

2.

- a.  $2 \times 15 = 5 \times 6$   
 $30 = 30$
- b.  $42 \times 6 = 12 \times 21$   
 $252 = 252$
- c.  $7 \times 44 = 11 \times 28$   
 $308 = 308$
- d.  $m \times y = n \times x$

3.

- a.  $m = 14$
- b.  $n = 40$
- c.  $x = 40$
- d.  $y = 1$

4. Vendió 18 revistas.

5. Horas.

7. En esta situación de variación están involucradas magnitudes como: tiempo, el volumen del cono (capacidad total), volumen de agua dentro del cono, altura del nivel del agua en el cono, capacidad del cono y rapidez de llenado del cono entre otras.

Podemos decir que las magnitudes que aumentan en la situación son el tiempo, el volumen de agua en el cono, la altura del nivel del agua dentro del cono; la que disminuye es la capacidad del cono y las que no cambian o permanecen constantes, son el volumen del cono y la rapidez de llenado del cono. A medida que el tiempo transcurre (aumenta), la altura del nivel del agua y la cantidad de agua en el cono

## Unidad 4

aumentan a la vez que la capacidad del cono disminuye.

Como el volumen del cono no cambia y su capacidad ha disminuido totalmente en los 4 minutos, el cono está completamente lleno.

- a. 5 personas no pueden jugar porque, les corresponde 9 cartas a cada uno y sobrarían tres, pero 6 personas sí pueden jugar porque, les corresponde 8 cartas a cada uno y no sobra.

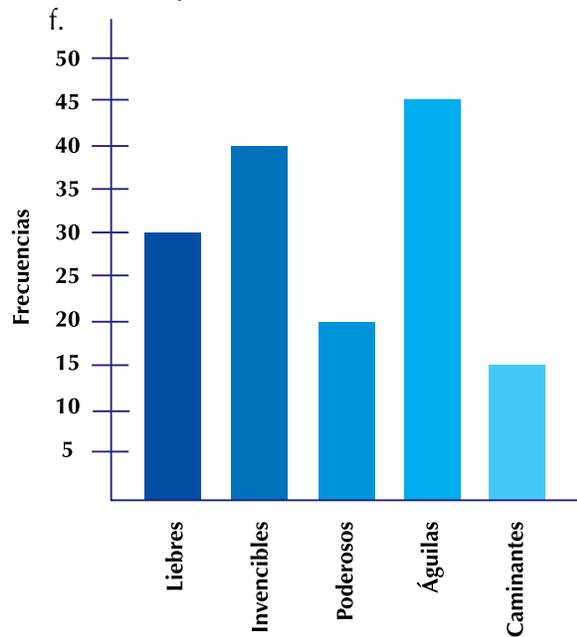
b.

Número de jugadores	x	2	3	4	6	8	12	16	24
Número de cartas que le corresponde a cada uno	y	24	16	12	8	6	4	3	2

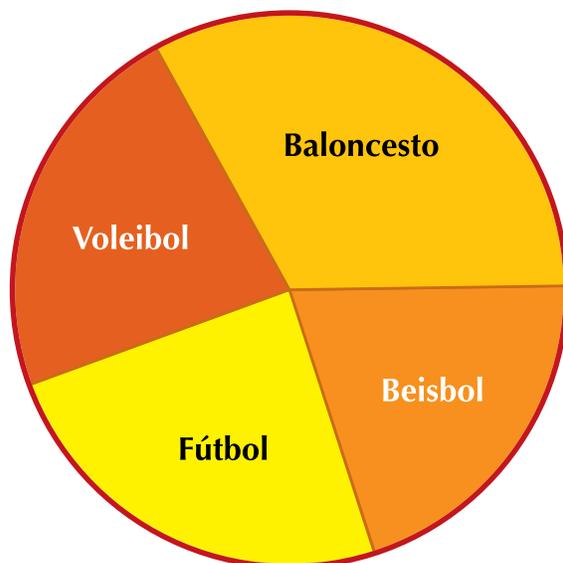
- c. La variación es inversamente proporcional, porque las razones inversas del número de jugadores son equivalentes a las razones correspondientes para el número de cartas, ejemplo:  $\frac{4}{2} = \frac{24}{12}$ , porque  $4 \times 12 = 2 \times 24$ .

1.

- a. Águilas.  
 b. Caminantes.  
 c. Invencibles.  
 d. 150 puntos.  
 e. Caminantes, porque fue el equipo que hizo menos puntos.

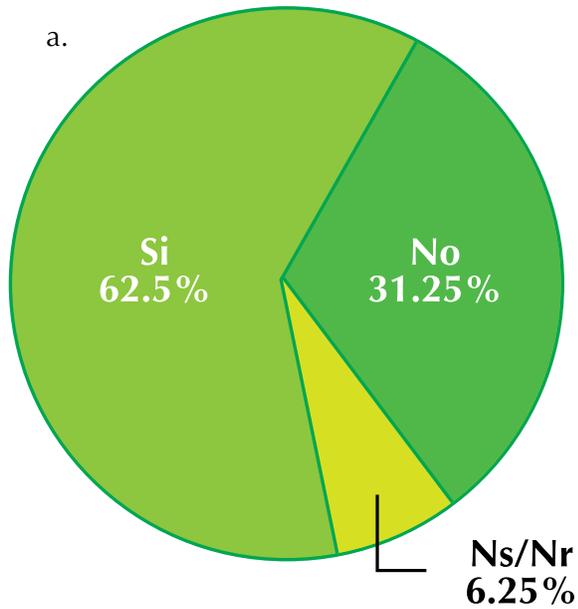


2.



3.

a.

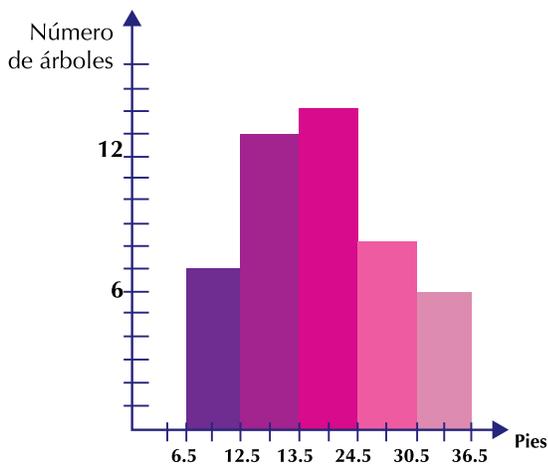


b. Sí: 1,550 entrevistados.  
 No: 750 entrevistados.  
 Ns/Nr: 150 entrevistados.

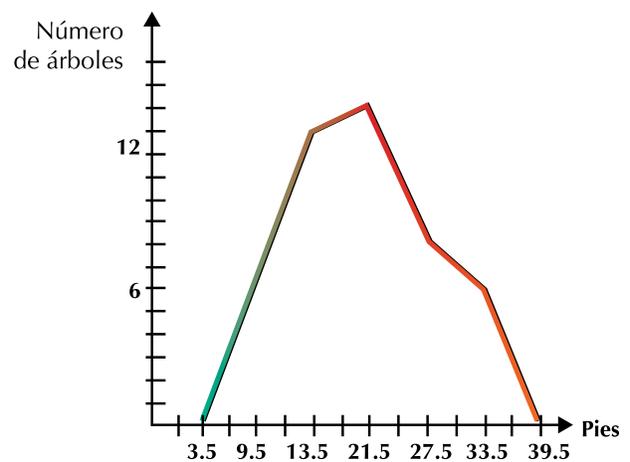
4.

Altura árboles finca "La María" (pies)				
Intervalo	Número de árboles	Límite real inferior	Límite real superior	Puntos medios
7-12	7	6.5	12.5	9.5
13-18	13	12.5	18.5	15.5
19-24	15	18.5	24.5	21.5
25-30	9	24.5	30.5	27.5
31-36	6	30.5	36.5	33.5

**HISTOGRAMA**



**POLÍGONO DE FRECUENCIAS**



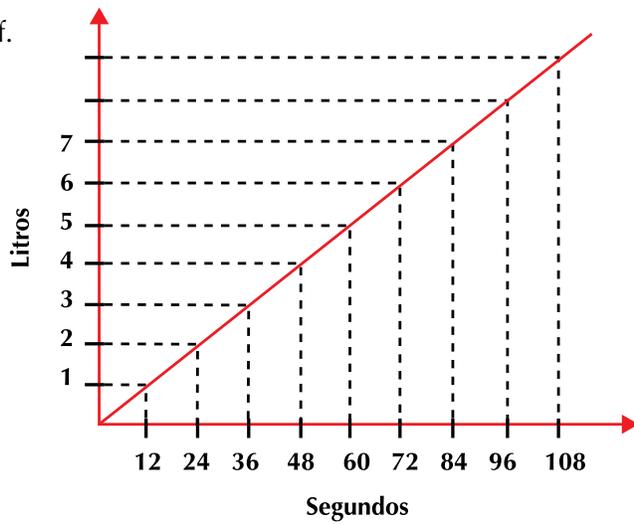
5.

- a. 144
- b. 91
- c. Es directamente proporcional.
- d. 12.

e.

<b>Número de litros</b>	1	2	3	4	5	6	7	8	9
<b>Segundos</b>	12	24	36	48	60	72	84	96	108
<b>Constante de proporcionalidad</b>	12	12	12	12	12	12	12	12	12

f.



*Aritmetica*, ECHEVERRY Carlos H.; OBANDO Gilberto de J.; TROCHEZ José E., Universidad del Valle. Instituto de educación y pedagogía, 1998

DAINTITH John; *Diccionario de Matemáticas*. Norma Editorial. (82- 115).

R. , Robbins, H. *¿Qué es la Matemática?*, ed. Aguilar, Madrid, 1962.

BOYER, Carl B. (1996). *Historia de la Matemática*. Madrid: Alianza Universidad.

NUMERO Y MAGNITUD, *Una perspectiva histórica*, universidad del Valle. Instituto de educación y pedagogía, 1998

SANTOS, Luz Manuel, "Resolución de problemas. El trabajo de Alan Schoenfeld: Una propuesta a Considerar en el

## Ministerio de Educación Nacional

MEN.. Documento 3: Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. *Revolución educativa Colombia aprende*. Colombia, 2008

MEN.. *Lineamientos curriculares Básicos para el área de Matemáticas*, Colombia, 2008

## Geometría

LOBACHEVSKI, N. *Nuovi Principi della Geometria*, Boringhieri, 1974.

## Física

*Galaxia, Física 10*. Editorial Voluntad. 1998. Pags. 302 - 304.

## Probabilidad y Estadística

ENGEL, Arthur. *Probabilidad y Estadística*, Traducción de MENEU Vicente y MORATA Magdalena, Mestral Universidad, Valencia.

ARENZANA HERNÁNDEZ, Víctor. *Estadística elemental con Excel 2000*, Zaragoza: Mira, 2003.

## Didáctica

ABRANTES, Paulo, “El papel de la resolución de problemas en un contexto de Innovación Curricular”, en: Revista Uno Nº 8, Año III, Grao Educación de Serveis Pedagògics, Barcelona, 1996.

AEBLI, Hans, *Doce formas básicas de enseñar*, Madrid, Nacea S. A. de Ediciones, 1988.

Aprendizaje de las Matemáticas”, en: *Revista Educación Matemática*, Vol. 4, Nº 2, México D. F., Grupo Editorial Iberoamérica, S.A., 1992.

ARTIGUE, M., “Una introducción a la didáctica de la matemática”, en Enseñanza de la Matemática, Selección bibliográfica, traducción para el PTFD, MCyE 1994.

ARTIGUE, M. (1995), “El lugar de la didáctica en la formación de profesores”, en Ingeniería didáctica en Educación Matemática, Grupo Editorial Iberoamericano.

JOHSUA, S.; DUPIN, J. (2005), Introducción a la didáctica de las ciencias y la matemática, Buenos Aires, Colihue.

VASCO, Carlos E., “Un nuevo enfoque para la didáctica de las matemáticas”. volumen I y II, en: Serie Pedagogía y Currículo, Ministerio de Educación Nacional, Bogotá, 1994, pág. 18

## Internet

<http://es.wikipedia.org/wiki/Wikipedia:Portada>

[http://es.wikibooks.org/wiki/Sistema\\_Binario](http://es.wikibooks.org/wiki/Sistema_Binario)

<http://www.mamutmatematicas.com/lecciones/porcentaje-incremento.php>

<http://es.wikipedia.org/wiki/Computadora>

<http://www.disfrutalasmaticas.com/definiciones/cociente.html>

<http://platea.pntic.mec.es/jescuder/numeros.htm>

<http://www.rinconesdelatlantico.com/num2/permacultura.html>

<http://thiagoonweb.com/?tag=computadorelectricidad>

[http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales\\_didacticos/Geom\\_esp\\_d3/indice.htm](http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Geom_esp_d3/indice.htm)

[http://mmpchile.c5.cl/pag/productos/geo/cu\\_geo.htm](http://mmpchile.c5.cl/pag/productos/geo/cu_geo.htm)

[http://www.utadeo.edu.co/comunidades/estudiantes/ciencias\\_basicas/geometria/simetria\\_04.pdf](http://www.utadeo.edu.co/comunidades/estudiantes/ciencias_basicas/geometria/simetria_04.pdf)

[http://portaleducativo.educantabria.es/binary//99/files99/FiguPla/regulares\\_e\\_irregulares.html](http://portaleducativo.educantabria.es/binary//99/files99/FiguPla/regulares_e_irregulares.html)

<http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=1159552>

<http://www.dmae.upm.es/cursofractales/capitulo1/3.html>

<http://leonardocodigoabierto.blogspot.com/2006/11/el-hombre-de-vitruvio.html>

[http://www.solla.com/index.php?option=com\\_content&task=view&id=198&Itemid=3122](http://www.solla.com/index.php?option=com_content&task=view&id=198&Itemid=3122)

[http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales\\_didacticos/Geom\\_esp\\_d3/indice.htm](http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Geom_esp_d3/indice.htm)

<http://leonardocodigoabierto.blogspot.com/2006/11/el-hombre-de-vitruvio.html>

[es.wikipedia.org/wiki/Estadística](http://es.wikipedia.org/wiki/Estadística)

[www.aulafacil.com/CursoEstadistica/CursoEstadistica.htm](http://www.aulafacil.com/CursoEstadistica/CursoEstadistica.htm)

[es.thefreedictionary.com/estadística](http://es.thefreedictionary.com/estadística)

[www.hrc.es/bioest/estadis\\_1.html](http://www.hrc.es/bioest/estadis_1.html)

[http://www.ipni.net/ppiweb/mexnca.nsf/\\$webindex/](http://www.ipni.net/ppiweb/mexnca.nsf/$webindex/)

<http://www.alvizlo.sostenibilizarte.es/index.php?showimage=49>

<http://www.elalmanaque.com/acertijos/mates.htm>

<http://leonardocodigoabierto.blogspot.com/2006/11/el-hombre-de-vitruvio.html>

<http://www.solla.com/index.php>

[http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales\\_didacticos/](http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/)

<http://www.lectura-escritura.blogspot.com>

<http://teleobjetivo.org/blog/aerogeneradores-en-torres-de-alta-tension.html>

<http://www.ojodigital.com/foro/>

<http://www.adrformacion.com/cursos/empresas/leccion2/tutorial1.html>

<http://www.disfrutalasmaticas.com/numeros/proporciones.html>

<http://portalevlm.usal.es/blogs/ampliacion/2009/09/>

<http://es.wikipedia.org/wiki/>

## Unidad 1

<http://pequelia.es/19821/los-huesos-del-recien-nacido/>

<http://www.casinojuegos.com/wp-content/uploads/consejos-de-apuestas-para-dados-1.jpg>

<http://huiulatrística.blogspot.com/2011/04/finca-cafetera-lomalinda.html>

<http://www.banrepcultural.org/evento/los-muiscas-trav-s-de-sus-objetos-4>

[http://media.mlive.com/businessreview/western\\_impact/photo/0173403-2jpg-e746494057c34d1a.jpg](http://media.mlive.com/businessreview/western_impact/photo/0173403-2jpg-e746494057c34d1a.jpg)

<http://www.recetariococina.net/el-huevo>

<http://www.panoramio.com/photo/1289535>

<http://cadenasyredestroficadas.wordpress.com/2009/02/>

[http://www.cronicadelquindio.com/noticia-completa-titulo-con\\_la\\_participacion\\_de\\_diversas\\_entidades\\_publicas\\_y\\_el\\_gremio\\_cafetero\\_se\\_presento\\_el\\_plan\\_cosecha-seccion-economicas-nota-18301.htm](http://www.cronicadelquindio.com/noticia-completa-titulo-con_la_participacion_de_diversas_entidades_publicas_y_el_gremio_cafetero_se_presento_el_plan_cosecha-seccion-economicas-nota-18301.htm)

<http://www.taringa.net/posts/ciencia-educacion/10190483/Teoria-del-universo-inflacionario.html>

<http://maribadell.blogspot.com/>

<http://www.motoradictos.com/lamborghini/se-abre-el-primer-concesionario-de-lamborghini-en-espana>

<http://www.forodefotos.com/fotos-personales-y-amigos/7651-inocente-felicidad.htm>

<http://sanssoleilmoda.blogspot.com/2010/10/menos-flores-cortadas.html>

<http://www.asociacioneduco.es/educativas.php>

<http://www.dicyt.com/viewItem.php?itemId=11947>

[http://www.kriyayoga.com/wallpapers/fondos\\_de\\_pantalla/fondos\\_jardines/jardines.html](http://www.kriyayoga.com/wallpapers/fondos_de_pantalla/fondos_jardines/jardines.html)

<http://prietasnotes.blogspot.com/2010/12/last-minute-ideas-ideas-de-ultimo.html>

<http://elcampodecebada.org/wp-content/uploads/2011/03/reuniones PARTICIPACION.jpg>

<http://www.bodaclick.com/bodas/espacios-singulares/finca-villa-palma.html>

<http://www.lacronicadeandalucia.com/category/medio-ambiente/page/2/>

<http://www.estamosenlinea.com.ve/2011/01/31/amadeus-lanza-una-nueva-version-de-e-travel-management-su-herramienta-de-autorreserva-para-empresas/>

<http://manglaresdorados.files.wordpress.com/2010/01/en-los-mercados-callejeros.jpg>

[http://2.bp.blogspot.com/\\_Cx5U920eBfc/S\\_MzJhpyh6I/AAAAAAAAACM/UmLA9f6Js9s/s1600/la+paz+071.JPG](http://2.bp.blogspot.com/_Cx5U920eBfc/S_MzJhpyh6I/AAAAAAAAACM/UmLA9f6Js9s/s1600/la+paz+071.JPG)

<http://www.panoramio.com/photo/3780518>

<http://www.colombia.travel/es/turista-internacional/multimedia/galeria/parques-naturales>

<http://www.heavyequipmentforums.com/showthread.php?19824-Big-Bud-tractors>

[http://apod.nasa.gov/apod/image/0703/bluemarble\\_apollo17\\_big.jpg](http://apod.nasa.gov/apod/image/0703/bluemarble_apollo17_big.jpg)

## Unidad 2

[http://www.sacheco.com.ar/files/productos/1585\\_ANGULO%20AT2510.jpg](http://www.sacheco.com.ar/files/productos/1585_ANGULO%20AT2510.jpg)

[http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/b4/Calculator\\_casio.jpg?uselang=es](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/b4/Calculator_casio.jpg?uselang=es)

<http://osofetecolorete.wordpress.com/2007/04/25/como-hacer-una-caja-de-papel/>

[http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/45/Tierra\\_1.JPG?uselang=es](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/45/Tierra_1.JPG?uselang=es)

<http://matematicas.itam.mx>

[http://www.indice de paginas .com/test\\_cubos](http://www.indice de paginas .com/test_cubos)

<http://www.miventadegarage.com.uy/wp-content/uploads/2011/05/3-canastos-Portico.jpg>

[http://mmpchile.c5.cl/pag/productos/geo/cu\\_geo.htm](http://mmpchile.c5.cl/pag/productos/geo/cu_geo.htm)

[http://mmpchile.c5.cl/pag/productos/geo/cu\\_geo.htm](http://mmpchile.c5.cl/pag/productos/geo/cu_geo.htm)

<http://www.infantilyprimaria.com/cono-1.htm>

[http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/e3/Apis\\_mellifera\\_carnica\\_worker\\_honeycomb\\_2.jpg](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/e3/Apis_mellifera_carnica_worker_honeycomb_2.jpg)

[http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/f9/Flower\\_blur.jpg?uselang=es](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/f9/Flower_blur.jpg?uselang=es)

[http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/32/Fern\\_leaves.jpg?uselang=es](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/32/Fern_leaves.jpg?uselang=es)

[http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/fb/Broccoli\\_bunches.jpg?uselang=es](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/fb/Broccoli_bunches.jpg?uselang=es)

[http://apod.nasa.gov/apod/image/0804/phages\\_wikipedia\\_big.jpg](http://apod.nasa.gov/apod/image/0804/phages_wikipedia_big.jpg)

[http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/f0/Pigeons\\_Sky\\_Sun.jpg?uselang=es](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/f0/Pigeons_Sky_Sun.jpg?uselang=es)

[http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/76/Fractal\\_broccoli%282%29.JPG?uselang=es](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/76/Fractal_broccoli%282%29.JPG?uselang=es)

[http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/4c/Chicago\\_buildings\\_01.jpg?uselang=es](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/4c/Chicago_buildings_01.jpg?uselang=es)

[http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/25/Sachica\\_rupestre.JPG](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/25/Sachica_rupestre.JPG)

[http://s3.amazonaws.com/cocina/public/files/production/steps/images/1576/original/\\_DSC1727.JPG?1326510853](http://s3.amazonaws.com/cocina/public/files/production/steps/images/1576/original/_DSC1727.JPG?1326510853)

<http://abcvoyage.com/wp-content/uploads/2010/03/JaponCarte.jpg>

[http://agrega.educacion.es/galeriaimg/5b/es\\_20071227\\_1\\_5025700/es\\_20071227\\_1\\_5025700\\_captured.jpg](http://agrega.educacion.es/galeriaimg/5b/es_20071227_1_5025700/es_20071227_1_5025700_captured.jpg)

[https://lakekacostura.files.wordpress.com/2012/03/img\\_0770\\_b.jpg](https://lakekacostura.files.wordpress.com/2012/03/img_0770_b.jpg)

[http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/f2/Mompox\\_-\\_La\\_Pietra\\_di\\_Bolivar\\_e\\_il\\_rio\\_Magdalena.jpg](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/f2/Mompox_-_La_Pietra_di_Bolivar_e_il_rio_Magdalena.jpg)

<http://delitometro.com.ar/wp-content/uploads/Barrio-Independencia-blancueo-de-paredones.jpg>

[http://www.bankoboev.ru/images/MTI5MjM0/Bankoboev.Ru\\_shikarnye\\_zoloty\\_slitki\\_999\\_9\\_kilo.jpg](http://www.bankoboev.ru/images/MTI5MjM0/Bankoboev.Ru_shikarnye_zoloty_slitki_999_9_kilo.jpg)

[www.esacademic.com/pictures/eswiki/83/Snookered\\_on\\_two\\_reds.jpg](http://www.esacademic.com/pictures/eswiki/83/Snookered_on_two_reds.jpg)

[http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/11/Wooden\\_hourglass.jpg](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/11/Wooden_hourglass.jpg)

[http://www.geodezist.info/test/gerald/foto/suvenir/octagon\\_s.gif](http://www.geodezist.info/test/gerald/foto/suvenir/octagon_s.gif)

[http://www.telefuerza.com/sabias\\_que/archivos/4fb636\\_tierra.jpg](http://www.telefuerza.com/sabias_que/archivos/4fb636_tierra.jpg)

[http://www.up.edu.mx/files\\_HTMLObject/image/01Mexico/Noticias%20y%20Eventos%20Mx/reloj.jpg](http://www.up.edu.mx/files_HTMLObject/image/01Mexico/Noticias%20y%20Eventos%20Mx/reloj.jpg)

<http://colegiodelreloj.files.wordpress.com/2010/10/experimentos.jpg>

[http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/39/File-Monolito\\_de\\_la\\_Piedra\\_del\\_Sol\\_%28centro%29.jpg](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/39/File-Monolito_de_la_Piedra_del_Sol_%28centro%29.jpg)

<http://aaiiuc3m.files.wordpress.com/2009/08/photo082.jpg>

### Unidad 3

<http://exotikbirds.files.wordpress.com/2011/01/novas-023.jpg>

<http://cdecomunidaddemadrid.files.wordpress.com/2009/04/campos-electromagneticos.jpg>

<http://3.bp.blogspot.com/-bTbUQYmkmaI/TgJKyPUmZYI/AAAAAAAAA2c/OGD1XICjoIU/s1600/suppp.PNG>

<http://static.panoramio.com/photos/original/11273658.jpg>

<http://www.pudeto.cl/wp-content/uploads/2011/01/Miles-de-personas-asiteron-al-IV-Agrofestival.jpg>

<http://www.hospitaldelsur.gov.co/php/BOLETINES/JUN2007/1%20BOLETIN%20CONJUNTOSUR%2007/imagenes/DSC00492.JPG>

<http://www.prensa.argentina.ar/advf/imagenes/4eea6abeb7f92.jpg>

<http://bemil.chosun.com/nbrd/files/BEMIL085/upload/2007/07/A300-600ST%20Beluga%20takes%20off.jpg>

[http://static.domestika.com/34141/imagenes/20091207233336-dsc\\_0336-or.JPG](http://static.domestika.com/34141/imagenes/20091207233336-dsc_0336-or.JPG)

[http://www.ENVILLADELEYVA.COM/imagenes/mapa\\_boyaca.jpg](http://www.ENVILLADELEYVA.COM/imagenes/mapa_boyaca.jpg)

[http://centros.edu.aytolacoruna.es/iesroteropedrayo/Matematicas/Libros/imaxes/Libros\\_037.jpg](http://centros.edu.aytolacoruna.es/iesroteropedrayo/Matematicas/Libros/imaxes/Libros_037.jpg)

<http://www.primeradama.gov.py/v1/wp-content/uploads/2009/03/marzo-pd-entrega-de-mochilas-en-la-esc-pj-caballero-4.jpg>

[http://www.mercedes.es/imagesNews/Maybach\\_2010\\_1.jpg](http://www.mercedes.es/imagesNews/Maybach_2010_1.jpg)

<http://deportadas.tv/wp-content/uploads/2010/11/3266963.jpg>

[http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/74/Tren\\_renfe\\_470-011-8.jpg](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/74/Tren_renfe_470-011-8.jpg)

[http://agrega.educacion.es/galeriaimg/1e/es\\_20071227\\_1\\_5050993/es\\_20071227\\_1\\_5050993\\_captured.jpg](http://agrega.educacion.es/galeriaimg/1e/es_20071227_1_5050993/es_20071227_1_5050993_captured.jpg)

[http://2.bp.blogspot.com/\\_gcfgz0QXo4c/TALWAO3Vn0I/AAAAAAAAAF0/Jh-PlwdZFH-l/s1600/materas+073.JPG](http://2.bp.blogspot.com/_gcfgz0QXo4c/TALWAO3Vn0I/AAAAAAAAAF0/Jh-PlwdZFH-l/s1600/materas+073.JPG)

[http://2.bp.blogspot.com/\\_0cHcMqGP\\_cQ/TEG0OLbKFwI/AAAAAAAAABc/GNB0XQLX1a4/s1600/SL272837.JPG](http://2.bp.blogspot.com/_0cHcMqGP_cQ/TEG0OLbKFwI/AAAAAAAAABc/GNB0XQLX1a4/s1600/SL272837.JPG)

[http://2.bp.blogspot.com/-ij1d4HbfkeM/TVQv9Jrj05I/AAAAAAAC84/FRu-6hCFuHEQ/s1600/burj\\_al\\_arab\\_dubai.jpg](http://2.bp.blogspot.com/-ij1d4HbfkeM/TVQv9Jrj05I/AAAAAAAC84/FRu-6hCFuHEQ/s1600/burj_al_arab_dubai.jpg)

## Unidad 4

<http://1.bp.blogspot.com/-cNkC-utejxo/TxbyqZhlerI/AAAAAAAHE/nkmXR7btzxE/s1600/Deportes+en+Iserra+100.jpg>

[http://moto-images.caradisiac.com/IMG/jpg/1/3/7/5/9/supercorsa\\_6\\_.jpg](http://moto-images.caradisiac.com/IMG/jpg/1/3/7/5/9/supercorsa_6_.jpg)

[http://3.bp.blogspot.com/\\_aaYOrIjnOMo/SwGjXrhNSmI/AAAAAAAafs/-KMK2NZdicU/s1600/ALUMNOS+EN+LA+FORMACI%C3%93N.JPG](http://3.bp.blogspot.com/_aaYOrIjnOMo/SwGjXrhNSmI/AAAAAAAafs/-KMK2NZdicU/s1600/ALUMNOS+EN+LA+FORMACI%C3%93N.JPG)

[http://3.bp.blogspot.com/\\_0Mv4ytZQcMk/TIdkLQ8IXnI/AAAAAAAHH0/wWCzY6sXtvY/s1600/SE%C3%91ALES+DE+TRANSITO-REGLAMENTARIAS.jpg](http://3.bp.blogspot.com/_0Mv4ytZQcMk/TIdkLQ8IXnI/AAAAAAAHH0/wWCzY6sXtvY/s1600/SE%C3%91ALES+DE+TRANSITO-REGLAMENTARIAS.jpg)

[http://www.mtc.gob.pe/portal/transportes/caminos\\_ferro/manual/Transito/anexob/pag267a.jpg](http://www.mtc.gob.pe/portal/transportes/caminos_ferro/manual/Transito/anexob/pag267a.jpg)

[http://2.bp.blogspot.com/\\_0Mv4ytZQcMk/TIdjdB6cmoI/AAAAAAAAAHk/0Cqxy4EAP6Q/s1600/SE%C3%91ALES+DE+TRANSITO-INFORMATIVAS.jpg](http://2.bp.blogspot.com/_0Mv4ytZQcMk/TIdjdB6cmoI/AAAAAAAAAHk/0Cqxy4EAP6Q/s1600/SE%C3%91ALES+DE+TRANSITO-INFORMATIVAS.jpg)

[http://planadas-tolima.gov.co/apc-aa-files/65626364343761646238626361663338/Regiones\\_Geogr\\_ficas.jpg](http://planadas-tolima.gov.co/apc-aa-files/65626364343761646238626361663338/Regiones_Geogr_ficas.jpg)

[http://agrega.educacion.es/galeriaimg/06/es\\_20071227\\_1\\_5037168/es\\_20071227\\_1\\_5037168\\_captured.jpg](http://agrega.educacion.es/galeriaimg/06/es_20071227_1_5037168/es_20071227_1_5037168_captured.jpg)

[http://lacomunidad.elpais.com/blogfiles/magazinedeinteligencia/310836\\_DSCN3350.JPG](http://lacomunidad.elpais.com/blogfiles/magazinedeinteligencia/310836_DSCN3350.JPG)

[http://bimg2.mlstatic.com/s\\_MCO\\_v\\_F\\_f\\_19227386\\_371.jpg](http://bimg2.mlstatic.com/s_MCO_v_F_f_19227386_371.jpg)

<http://douglasvermeeren.files.wordpress.com/2010/10/brain-model.jpg>

<http://www.civismoenaccion.com/inicio/wp-content/uploads/2010/09/bandera-colombia.jpg>